This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

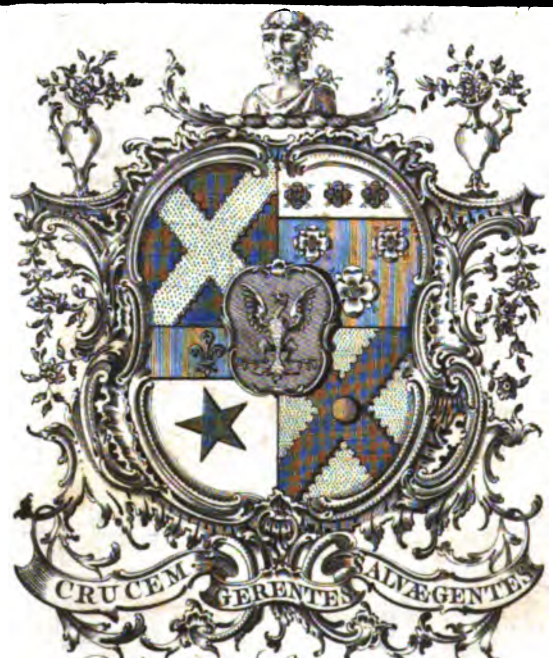
Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`



Thomas Salwey LL.D.
of Richards-Castle,
SALOP.

QA
35
.H22



DE

SECTIONIBUS CONICIS.

TRACTATUS GEOMETRICUS.

In quo, ex Natura ipſius CONI, Sectionum Affectioens facillime deducuntur.

METHODO NOVA.

AUCTORE
HUGONE HAMILTON, A. M.
COLLEGII S. TRINITATIS DUBLINII SOCIO.

LONDINI:
Impenſis GUL. JOHNSTON, in vico vulgo dicto, *Ludgate-Street.*
MDCCLVIII.

MU

Hist. of science
Bowes
1-11-31
24596

MAXIME REVERENDO

IN

CHRISTO PATRI AC DOMINO,

GEORGIO,

DIVINA PROVIDENTIA

ARCHIEPISCOPO ARMACHANO;

TOTIUS HIBERNIÆ PRIMATI AC METROPOLITANO;

UNI E JUSTICIARIIS REGNI;

UNIVERSITATIS DUBLINIENSIS VICECANCELLARIO;

REI LITERARIÆ FAUTORI EXIMIO:

HUNC TRACTATUM

HUMILLIME D. D.

HUGO HAMILTON.

PRÆFATIO.

QUANTA ſit doctrinæ Sectionum Conicarum præſtantia, nil opus eſt hic differere, cum ſatis ſit eruditis notum quam late pateat uſus ejus, non ſolum in Aſtronomia & Philoſophia Naturali, ſed etiam in artibus quibuſdam practicis. Non mirum igitur quod Mathematici tam veteres quam recentiores in ea colenda operam impenderint.

Inter Veteres, qui hanc partem Matheſeos excoluere, longè eminet Apollonius, qui, propter rerum inventarum præſtantiam, & accuratam demonſtrandi rationem, apud omnes Magni Geometræ *nomen adeptus eſt. Tamen Conicorum doctrinam, ab eo traditam, aſperam & nimis difficilem eſſe, eamque difficultatem neque Mydorgium neque alios ſuſtuliſſe, teſtatur Clariſſimus Walliſius. Hanc etiam doctrinam ii, qui deinceps eam tradiderunt, non ſatis dilucide tradidiſſe videntur. Cujus rei ſi cauſas exquiramus, inveniemus quod ii qui, nullâ Coni ratione habitâ, Sectiones Conicas per earum deſcriptiones in plano definiunt, omnes ipſarum affectiones deducere conati ſunt, ex ſingulis affectionibus in unaquaque Sectione, quæ ab affectionibus principalibus & quaſi eſſentialibus longe diſtant, & iis prorſus ſunt diſſimiles; in his methodis igitur plurimas propoſitiones operoſe*

 demonſtrare

demonſtrare neceſſe eſt, priuſquam ad affectiones præcipuas & generales devenire licet. Veteres equidem Scriptores, quique eorum veſtigiis inſiſtunt, Sectionum Conicarum affectiones ex natura Coni derivandas eſſe recte judicaverunt; eorum tamen methodi imperfectæ & nimis prolixæ videntur; quia ſciz. Sectionum affectiones demonſtrare aggreſſi ſunt, priuſquam naturam & affectiones ipſius Coni ſatis inſpexerant; unde fit ut magnâ operâ quaſdam affectiones de ſingulis Sectionibus demonſtrant quæ ipſi Cono competunt, de quo facile & generaliter demonſtrari poſſunt atque inde ad ipſas Sectiones nullo negotio tranſferri.

Nec quidem hæc temere dixiſſe videbor iis, qui diverſas aliorum methodos cum ea, qua in tractatu ſequenti utor, comparaverint. Qualis autem iſta ſit, paucis jam expediam.

In Elementis Geometriæ affectiones duarum Sectionum Conicarum, ſciz. Trianguli & Circuli, ex ipſarum in plano deſcriptionibus facillime eliciuntur. Quoniam vero tres reliquas Sectiones, de quibus tractare ſtatuimus, nequaquam in plano ita deſcribere licet, ut earum affectiones ex ipſis deſcriptionibus facile deducantur; propoſitum eſt, harum Figurarum definitiones veteres retinere, & naturam Superficierum Conicarum ita explicare ut ſimul ac hæ Figuræ definiuntur, per interſectiones planorum cum iſtis ſuperficiebus, ſtatim pateat quænam ſint earum affectiones principales, ex quibus cæteræ facilius deinceps eliciantur. In hunc finem igitur, priuſquam hæ Sectiones definiuntur, traduntur quædam affectiones Superficierum Conicarum, ut in Propp. 11, 12, 13, 14. *lib.* 1. *quæ in ſe continent fere omnes affectiones principales harum Sectionum; & deinde quoniam, ex ipſarum definitionibus, conſtat eas eſſe Curvas quarum omnia puncta in Superficie Conica collocantur, manifeſtum eſt, omnem lineam rectam, his Sectionibus aliquo modo occurrentem, eodem modo & in iiſdem punctis Superficiei Conicæ occurſuram;*

omnes

omnes igitur affectiones, quas prius demonſtratum eſt convenire rectis lineis Superficiei Conicæ occurrentibus, ad rectas quæ his Sectionibus occurrunt nullo negotio transferri poſſint; atque ita harum Sectionum affectiones principales & maxime generales (ex quibus alias facilius deduci poſſe æquum eſt ſperare) cæteris tanquam fundamentum ſubſternuntur.

Ex hac methodo multa oriuntur commoda. Hinc enim fit, ut omnia quæ tribus Sectionibus conveniunt de iis ſemper conjunctim demonſtrare liceat. Tum eliciendo proprietates particulares ex generalibus, demonſtrationes breviores fiunt. Præterea tollitur neceſſitas utendi Lemmatibus aut iis propoſitionibus quæ aliis demonſtrandis ſolummodo inſerviunt, & quibus opera hujuſmodi nimis abundant, itaque iſtæ tantum propoſitiones demonſtrantur quæ vel aliquem uſum in aliis ſcientiis præſtare poſſint, vel quæ viſæ ſunt in ſe continere aliquid ſpeculatione dignum. Deinde ipſas propoſitiones ita diſponere licet, ut omnes Sectionum affectiones ejuſdem generis, ſive quæ eodem pertinent, ſimul demonſtrentur. Hinc denique patebit cauſa, quare hæ Curvæ in quibuſdam affectionibus longè diverſæ, in aliis penitus conveniunt.

Theorematum demonſtrationes & Problematum ſolutiones ſunt plerumque novæ; ut nova methodus, novuſque propoſitionum ordo, omnino exigunt. Et, ut demonſtrationes fiant more Veterum quam accuratiſſimæ, quantitates evaneſcentes punctaque in infinitum abeuntia, *quæ a quibuſdam Scriptoribus in demonſtrationibus aliquando adhibentur, nullum apud nos locum habent.*

Inter huncce Tractatum componendum quicquid in operibus aliorum mihi viſum eſt utile, & ad Elementarem hujuſmodi inſtitutionem proprie ſpectare, inſerui; & inſuper propoſitiones quaſdam attuli a nemine quantum ſcio antehac traditas: inter quas numerare licet eas, de Superficiebus Conicis, ſupra memoratas,

moratas, ut & Prop. 54. *lib.* 1. *Propp.* 29, 36, 37. *lib.* 2. *Propp.* 3, 5. *lib.* 3. *Propp.* 6, 9, 11, 12, 13. *lib.* 4. *Prop.* 14. *lib.* 5. *multa quoque corollaria nova paſſim obſervabit Lector eruditus.*

Poſt aliquas propoſitiones citantur quædam propoſitiones ex Clariſ. Newtoni Nat. Phil. Prin. Math. quibus ſciz. fuſius explicandis propoſitiones noſtræ inſervire poſſint. Nam ut ad ejus Philoſophiam (quæ doctrinâ Sectionum Conicarum tanquam fundamento nititur) facilior eſſet aditus, præcipuum fuit hujuſce Tractatus propoſitum.

ARGUMENTA

ARGUMENTA LIBRORUM.

LIBER PRIMUS.

IN novem primis propoſitionibus tractatur de affectionibus ſuperficierum conicarum quæ ab aliis antehac traditæ ſunt. Deinde traduntur aliæ quædam affectiones ſuperficierum, quæ ſunt etiam affectiones præcipuæ & generales ſectionum conicarum, ut ex ipſarum definitionibus poſtea demonſtratur. Inveniuntur Centra Ellipſeos & Hyperbolarum; & exponuntur proprietates quæ omnibus diametris ſectionum in genere conveniunt. Agitur etiam de proportione quadratorum rectarum quæ cuivis diametro ſectionis ordinatim applicantur. Deinde generationes & affectiones linearum, quæ dicuntur Hyperbolarum aſymptoti, dilucide explicantur, & exponitur natura Hyperbolarum conjugatarum. In hoc libro agitur de proportione quadratorum & rectangulorum quæ continentur ſegmentis rectarum ſibi mutuo occurrentium, & ſectiones conicas contingentium vel ſecantium; & traduntur inſuper methodi ducendi rectas quæ ſectiones contingant. Denique agitur de rectangulis contentis rectis quæ a punctis in ſectione ducuntur ad trapezii inſcripti latera, & cum iis datos angulos comprehendunt; & oſtenditur duas ſectiones conicas ſibi invicem non occurrere in punctis pluribus quam quatuor.

LIBER

LIBER SECUNDUS.

PARAMETRI diametrorum ſectionum definiuntur; & oſtenditur quibus rectangulis æquantur quadrata ex rectis quæ diametro ſectionis ordinatim applicantur. Inveniuntur axes Sectionum; & axes Ellipſeos & Hyperbolæ cum aliis diametris comparantur. Definiuntur foci & directrices ſectionum; deinde agitur de ratione quam in omni ſectione recta a puncto ſectionis ad focum ducta, habet ad perpendicularem ab eodem puncto ductam ad directricem, & oſtenditur in Parabola hanc eſſe rationem æqualitatis; oſtenditur vero rectam, a puncto Hyperbolæ ad focum ductam æqualem eſſe rectæ, ad directricem ductæ, aſymptoto parallelæ. Probatur in Ellipſi ſummam, & in Hyperbola differentiam, rectarum, quæ a puncto ſectionis ad focos ducuntur, æqualem eſſe axi tranſverſo. Oſtenditur quod recta Parabolam contingens æquales angulos comprehendit cum recta a contactu ad focum ducta & perpendiculari ad directricem; & quod recta Ellipſim aut Hyperbolam contingens æquales angulos comprehendit cum rectis a contactu ad focos ductis. Tractatur deinde de variis rectis per focos ſectionum tranſeuntibus & de rectangulis contentis ipſarum ſegmentis. Traduntur methodi deſcribendi ſectiones conicas in plano ope inſtrumentorum. Ad finem hujuſce libri oſtenditur, quod ſi ſectio ſit in ſuperficie coni recti, inveniri poteſt circuli circumferentia in eadem ſuperficie ita poſita ut latus coni inter ipſam & quodvis in ſectione punctum interceptum, æquale ſit rectæ ab eodem puncto ad focum ſectionis ductæ; & quod interſectio plani iſtius circuli cum plano ſectionis erit ipſius directrix.

LIBER

LIBER TERTIUS.

IN hoc libro agitur de ratione quam habent inter ſe parametri diametrorum Parabolæ; & traduntur quædam affectiones Parabolæ quæ aliarum ſectionum affectionibus minus affines videantur. Agitur etiam de Quadratura Parabolæ & de ſegmentis Parabolicis inter ſe comparatis.

LIBER QUARTUS.

DE parallelogrammis circa diametros conjugatas Ellipſeos aut Hyperbolæ deſcriptis; & in hoc libro agitur etiam de æqualitate aliorum parallelogrammorum quæ Ellipſi aut Hyperbolis inſcribuntur vel circumſcribuntur. Oſtenditur ſummam quadratorum ex duabus diametris conjugatis Ellipſeos æqualem eſſe ſummæ quadratorum ex axibus; & in Hyperbola oſtenditur differentiam quadratorum ex duabus diametris conjugatis æqualem eſſe differentiæ quadratorum ex axibus. Agitur de diametris conjugatis Ellipſeos inter ſe æqualibus. Traditur nova methodus inveniendi diametros conjugatas Ellipſeos & Hyperbolæ quæ datos angulos comprehendant, & inveniendi interſectionem rectæ poſitione datæ cum Ellipſi aut Hyperbola. Tractatur de ſectoribus & trapeziis Hyperbolicis. Comparatur Ellipſis cum circulo circa axem ejus deſcripto.

LIBER

LIBER QUINTUS.

TRACTATUR de affectionibus ſectionum conicarum ſimilium; & de rectis quæ a ſectionibus harmonice ſecantur. Oſtenditur quod duæ rectæ ſectionem vel oppoſitas ſectiones contingentes concurrent ad rectam poſitione datam, cum recta ipſarum contactus jungens tranſeat per punctum datum; & traduntur quædam aliæ affectiones quæ omnibus ſectionibus conveniunt. Agitur de ſectionibus quæ ſe invicem contingunt aut ſecant, & de circulis ſectiones contingentibus. De maximis & minimis rectis quæ, a punctis in axe datis, duci poſſunt ad ſectionem. De circulis qui eandem curvaturam cum ſectionibus habent. De ſectionibus deſcribendis quæ per puncta data tranſeant & rectas poſitione datas contingant.

SECTIONUM CONICARUM

LIBER PRIMUS.

De Natura Coni ejuſque Sectionis.

DEFINITIONES.

I. SI per quodvis punctum A, extra planum circuli BDEC, poſitum, utrinque infinite extendatur recta linea AE, &c. manente puncto A, per totam circuli peripheriam circumagatur; Binæ Superficies ejus motu genitæ appellantur ſigillatim *Superficies Conicæ*: conjunctim vero, *Superficies oppoſitæ*. Fig. 1.

II. Solidum ſuperficie conicâ & circulo BDE contentum, *Conus* dicitur.

III. Punctum A *Vertex Coni* dicitur.

IV. Circulus BDE, *Baſis Coni*.

V. Recta AE, per verticem coni & punctum in peripheria baſis ducta, *Latus Coni* dicitur.

VI. Recta AC, per verticem & baſis centrum C utrinque infinite producta, *Axis* dicitur.

VII. Si axis ad baſim rectus fuerit, *Conus rectus* dicitur.

VIII. Si vero inclinatus fuerit, *Conus Scalenus* dicitur.

IX. Recta ſuperficiei conicæ in uno puncto occurrens & utrinque producta cadens extra ſuperficiem, *Contingens* dicitur; Recta vero ſuperficiei vel ſuperficiebus oppoſitis in duobus punctis occurrens, *Secans* dicitur.

COROLLARIUM. Recta per quodvis punctum in utravis ſuperficie & verticem ducta, tota eſt in eadem ſuperficie; productaque ultra verticem eſt in ſuperficie oppoſita.

X. Communis plani alicujus cum ſuperficie conica interſectio, dicitur *Sectio Conica*.

PROPOSITIO I.

Planum quodvis tranſiens per verticem coni & ſecans peripheriam baſis, ſecabit ſuperficies oppoſitas in duabus rectis & in iſtis tantum.

NAM ſi a punctis, in quibus hocce planum occurrit peripheriæ baſis, ducantur ad verticem duæ rectæ; erunt in plano ſecanti & (per Cor. præc.) in ſuperficie coni, & ultra verticem productæ in ſuperficie oppoſita; hoc eſt, planum ſecat ſuperficies oppoſitas in hiſce duabus rectis. Porro, cum interſectio hujuſce plani cum plano baſis ſecare nequit peripheriam baſis in tribus punctis, patet quod planum ſecare nequit ſuperficies oppoſitas in tribus rectis; ergo planum ſecat ſuperficies ſolummodo in duabus rectis.

Cor. Communis interſectio alicujus plani per verticem ductæ cum ſuperficie conica & baſi, erit triangulum.

PROP. II.

Recta Linea ED conjungens bina quæcunque puncta E, D, in ſuperficie conica, modo non ſint in eadem recta per verticem tranſeunte, tota cadit intra ſuperficiem, producta vero utrinque extra eandem, & neutri ſuperficierum amplius occurrit. Contra, recta ED conjungens puncta, E, D, in oppoſitis ſuperficiebus, modo non ſint in eadem recta per verticem tranſeunte, cadit extra utramque ſuperficiem, & utrinque producta intra utramque cadit, neutrique earum amplius occurrit. FIG. 2. FIG. 3.

NAM per puncta E, & D, ductis coni lateribus AEC, & ADB, planum per has rectas tranſiens non occurrit ſuperficiei, vel ſuperficiebus oppoſitis niſi in rectis AEC, ADB, unde Recta DE non occurrit ipſis, niſi in punctis D, E.

In priore vero caſu planum anguli DAE, & proinde recta DE, eſt intra ſuperficiem conicam; ideoque producta utrinque extra eandem cadit. FIG. 2.

In poſteriore caſu planum anguli DAE & proinde recta DE eſt extra utramque ſuperficiem oppoſitam, & igitur DE utrinque producta cadet intra ſuperficies oppoſitas. FIG. 3.

Si puncta D, E, ſint in eadem recta per verticem tranſeunte, recta ipſa conjungens (per Cor. ad. def.) erit tota in ſuperficiebus conicis.

PROP. III.

Si recta DE peripheriam baſis coni contingat in puncto D, & a coni vertice A ducatur ad contactum recta AD; planum ADE per utramque rectam productum ſuperficiei conicæ ſolummodo in recta AD occurrit; hujuſmodi vero occurſus, *Contactus* dicitur. FIG. 4.

NAM recta AD tum ſuperficiei conicæ, tum plano ADE communis eſt, cum vero præter D quodvis aliud punctum in baſis peripheria, puta F, ſit extra rectam DE, erit etiam præter DA quævis alia recta FA in ſuperficie conica, extra planum ADE, unde liquet propoſitum.

Cor. 1. Hinc & ex defin. 1. liquet planum ADE productum ſuperficiem oppoſitam in AD producta contingere.

Cor. 2. Hinc etiam patet methodus ducendi planum quod ſuperficiem conicam in data recta AD contingat; nempe ductâ in plano baſis rectâ DE ejus peripheriam in D contingente, actoque per AD, DE plano ADE, hoc ſuperficiem in recta AD continget.

Cor. 3. Si quævis recta ED ſuperficiem conicam in puncto D contingat, & a vertice ducatur AD; planum ductum per AD, DE, ſuperficiem continget. Nam per verticem A ducatur, in plano ADE, recta AG parallela ipſi ED, hæc omnibus lateribus coni in vertice occurrit: ergo ſi quodvis aliud latus coni præter AD, eſſet in plano ADE, recta ED ipſi AG parallela, iſti lateri neceſſario occurreret, ac proinde ED occurreret ſuperficiei conicæ in duobus lateribus contra hypotheſin: Ergo planum ADE, niſi in AD, ſuperficiei non occurrit.

Cor. 4. Præter ADE aliud planum ſecundum rectam AD ſuperficiem conicam non contingit. Nam interſectio ejus cum plano baſis ſecabit peripheriam ejus. Unde & planum ipſum ſuperficiei conicæ occurret in duabus rectis (per Prop. 1.) et ergo eam non continget.

PROP. IV. PROBL. I.

Fig. 5, 6. Per rectam AC per coni verticem extra ſuperficiem ejus utcunque ductam, planum ducere, quod ſuperficiem conicam contingat.

PER

PER AC agatur utcunque planum, ſecans baſim in GH cui recta AC (cum in eodem ſit plano) occurret, vel erit parallela; primo occurrat ei in E; & a puncto E ex utravis parte ipſius EGH ducatur recta ED baſis peripheriam contingens; connexâ AD, erit ADE planum quæſitum; tranſit enim per AC, & (per præced.) ſuperficiem contingit. Secundo, ſit AC parallela ipſi GH; ducatur MD baſis diameter ipſi GH perpendicularis peripheriæ occurrens in D, per D ducatur DE baſim contingens, erit parallela ipſi GH ac proinde ipſi AC, tum connexâ AD, erit ADE planum quæſitum; nam ob parallelas AC et DE erit AC in plano ADE & hoc planum ſuperficiem conicam continget (per præced.) Fig. 5. Fig. 6.

Cor. Liquet bina tantum plana per AC tranſeuntia ſuperficiem conicam contingere; ex utraque parte ſcilicet plani AGH, unum.

PROP. V.

Recta quævis ED, cuivis lateri coni AB parallela (modo non ſit in plano ſuperficiem in AB contingente) uni ſuperficierum oppoſitarum idque in unico puncto E occurrit; hoc eſt, ex una parte, tota eſt extra utramque ſuperficiem, et ex altera, tota intra illam in qua ſitum eſt punctum E. Fig. 7.

PLANUM per parallelas AB, ED, ſecet ſuperficies in *c* AC; hoc planum non occurrit ſuperficiebus, niſi in rectis AB et *c* AC; rectaque ED in hoc plano (ob parallelismum) non occurrit rectæ AB, neceſſario tamen occurrit rectæ *c* AC alicubi in E & manebit ex una parte puncti E intra angulum BAC, ex alterâ intra angulum qui eſt huic deinceps; unde conſtat Prop.

Cor. Liquet planum per DE tranſiens et plano ſecundum AB ſuperficiem conicam contingenti parallelum, ſuperficiei oppoſitæ non occurrere.

PROP.

PROP. VI.

FIG. 8. **Omnis recta EF, parallela cuivis rectæ AD, per verticem A ductæ, atque intra ſuperficies conicas cadenti, utrique**
FIG. 9. **ſuperficiei ſemel occurrit alicubi in E, F. Omniſque recta EF ducta per quodvis punctum P intra utramvis ſuperficiem, et parallela cuivis rectæ AD per verticem ductæ et extra ſuperficies cadenti, eidem ſuperficiei alicubi occurrit in E, F, punctis.**

PER AD et rectam EF tranſeat planum ſecans conicas ſuperficies in BA*b*, CA*c*, quod ſemper fieri poſſe ſatis manifeſtum eſt; cum in priori caſu AD cadit intra angulum BAC, recta EF, quæ eſt ipſi AD parallela & in eodem plano cum angulo BAC, neceſſario lateribus ejus AC, AB occurret, ſcilicet ipſi AC in E, & AB productæ in ſuperficie oppoſita in F. Cum autem in poſteriori caſu AD cadit extra angulum BAC, recta EF ei parallela ducta per punctum P, intra hunc angulum, neceſſario occurret ipſis AC, AB, alicubi in E, F, hoc eſt occurret ipſi ſuperficiei, intra quam ſumitur P, in E, F punctis.

COR. I. Hinc & ex Prop. 2. liquet rectam lineam ſuperficiei conicæ vel ſuperficiebus oppoſitis in tribus punctis non occurrere.

COR. II. Si recta ducatur parallela cuivis rectæ EF occurrenti ſuperficiebus oppoſitis; ipſa quoque occurret ſuperficiebus oppoſitis. Nam ſi per verticem A ducatur recta AD parallela ipſi EF patet eam cadere intra ſuperficies conicas; ergo quævis recta parallela rectæ EF erit parallela rectæ per verticem ductæ et intra ſuperficies cadenti, & proinde ſuperficiebus oppoſitis occurret.

COR. III. Cum recta EF jungit puncta duo in eadem ſuperficie, recta AD huic parallela per verticem ducta cadet extra ſuperficies; nam manifeſtum eſt eam cadere ſemper extra angulum BAC, cujus lateribus recta EF occurrit.

COR.

Cor. IV. Omne planum tranſiens per hujuſmodi rectam EF, in priori caſu, ſecabit utramque ſuperficiem; & in poſteriori, ſi per AD tranſeat planum extra utramque ſuperficiem cadens, planum per EPF huic parallelum, ſuperficiem conicam intra quam punctum P ſumptum eſt ſecabit per totum ejus ambitum, & ſuperficiei oppoſitæ non occurret.

PROP. VII.

Si alterutra ſuperficierum oppoſitarum ſecetur plano GHF baſi parallelo, erit ſectio EGFL, circuli circumferentia cujus centrum erit in axe coni. Fig. 10.

Sit C baſis centrum & AC axis coni, ſecetur conus utcunque per axem duobus planis facientibus triangula ABD, ATK, quæ (ſi opus producta) occurrant plano GHF in rectis GHL, EHF; ob plana parallela erunt triangula AHF, ACK, uti etiam AHL, ACD ſimilia: quare erit HL ad CD, ut AH ad AC, & erit etiam HF ad CK, in eadem ratione, unde (alternando) erit HL ad HF, ut CD ad CK, ſed CD et CK æquales ſunt, ergo æquales ſunt HL, HF. Pari modo oſtendi poteſt duas quaſvis alias rectas ut HG, HE, ductas a puncto H ad ſectionem EGFL eſſe æquales ergo iſta ſectio eſt circuli circumferentia, & (6. 5.) centrum ejus H eſt in axe coni ut patet.

Cor. I. Hinc patet quod ſi hujuſmodi ſectionis diameter ducatur, per axem coni tranſibit; & contra ſi recta in plano hujuſmodi ſectionis ducta, tranſeat per axem coni, erit diameter ſectionis.

Cor. II. Hinc etiam liquet, quod quivis circulus baſi parallelus pro baſi coni haberi poteſt.

PROP. VIII.

Fig. 11. Si conus ſcalenus ABCL ſecetur plano per axem ad baſim recto, faciente triangulum ABL; & ab ejus angulo verticali BAL ſecetur triangulum ADT ſimile triangulo ABL, ſed ſubcontrarie poſitum, hoc eſt, ut angulus ATD ſit æqualis angulo ABL; & ſecetur iterum conus plano per DT recto ad planum trianguli ABL: ſectio DKTF facta in ſuperficie conica erit circuli circumferentia.

SIT recta MN, communis interſectio plani DKTF cum plano baſis; a quovis puncto K, in linea DKTF ducatur KGF parallela ipſi MN occurrens DT in G, per G ducatur EH in plano ABL parallela ipſi BL, tunc planum tranſiens per KGF, EGH, erit parallelum baſi (15. 11.) ac proinde ad planum ABL rectum; & ejus interſectio cum ſuperficie coni erit circulus cujus diameter eſt EGH (per præced. & coroll. 1.). propter utriuſque ſectionis planum, ad planum trianguli ABL rectum, erit eorum interſectio KGF perpendicularis ad ABL planum (19. 11.) & proinde ad utramque rectam EH, DT; ergo (propter circulum) quadratum ex KG, æquale eſt rectangulo EGH; poſiti autem fuerunt anguli ATD & (ABL ſive) AEH æquales, & æquales ſunt anguli verticales ad G, & proinde æquales ſunt reliqui anguli EDG, GHT, ergo ſimilia ſunt triangula EDG, GHT; ergo erit DG ad EG, ut GH ad GT; & ergo rectangulum DGT æquale eſt rectangulo EGH, hoc eſt, quadrato ex KG. Ergo punctum K, eſt in circumferentia circuli circa diametrum DT in plano DGK deſcripti; nam aliter rectangulum DGT æquale eſſet quadrato rectæ majoris ipſâ KG vel minoris eâ contra quod jam fuit probatum. Pari modo, idem oſtendi poteſt de quovis alio puncto in ſectione DKTF quæ eſt igitur circuli circumferentia. Hujuſmodi ſectio dicitur *ſectio ſubcontraria.*

PROP.

PROP. IX.

Si in ſuperficie conica a Plano quovis baſi non parallelo fiat ſectio DKTF quæ ſit circuli circumferentia, erit eadem ſectio ſubcontraria. Fig. 11.

SECETUR ſuperficies conica duobus planis baſi parallelis facientibus circulos EKHF, OPQR, & interſecantibus planum DKTF in rectis KF, PR quæ erunt parallelæ (per 16, 11.) ducantur EH, OQ diametri horum circulorum perpendiculares rectis KF, PR iiſque occurrentes in punctis G, S, ipſæ EH, OQ erunt inter ſe parallelæ (converſ. 10. 11.) & rectas KF, PR bifariam ſecabunt in G, S (3. 3.) & tranſibunt per axem coni per (cor. 1. 7. hujus) ergo planum AOEBLHQ tranſit per axem Coni; ſit recta DT ejus interſectio cum plano circuli DKTF; cum igitur DT tranſit per G, & S, & proinde bifariam ſecat rectas KF, PR circulo DKTF terminatas, eſt iſtius circuli diameter & his rectis perpendicularis, ut conſtat ex 3, 3. quoniam ergo recta KF eſt perpendicularis rectis DGT, EGH erit perpendicularis ad planum ABL per haſce rectas tranſiens; ergo (per 18, 11.) plana circulorum DKTF EKHF, & proinde planum baſis, erunt recta ad planum ABL per axem coni tranſiens; ſed propter eoſdem circulos, erit utrumque rectangulum EGH, DGT æquale quadrato ex KG, & ergo inter ſe æqualia; ergo erit DG ad EG, ut GH ad GT, & anguli verticles ad G ſunt æquales, ergo ſimilia ſunt triangula DGE, HGT, (per 6, 6.) & ergo angulus ATD æqualis eſt angulo AEH, hoc eſt, angulo ABL; ergo ex præcedenti, ſectio DKTF eſt ſectio ſubcontraria.

Cor. Hinc ſectio conica, quæ nec ſit ſectio ſubcontraria, nec facta plano baſi parallelo, non erit circuli circumferentia.

PROP. X.

Fig. 12, 13. Occurrant ſibi invicem in puncto P duæ rectæ, quarum una ſit plano baſis coni parallela, altera vero parallela rectæ poſitione datæ & ſecanti planum baſis: prout ambæ rectæ contingant, aut ſecent, vel earum una contingat, & altera ſecet, ſuperficiem conicam vel ſuperficies oppoſitas; Quadrata ſegmentorum contingentium, vel rectangula contenta ſecantium ſegmentis, inter rectarum occurſum, & puncta quibus occurrunt ſuperficiei vel ſuperficiebus, erunt ſemper ad ſe invicem in eadem ratione ubicunque cadat punctum P rectarum occurſus. *Rectam vero dico parallelam plano, cum in iſto plano duci poteſt recta ei parallela.*

SIT Conus ABC cujus baſis eſt circulus ASC, & ſit BM recta poſitione data, ducta ſcilicet a vertice coni B ad punctum quodvis datum M in plano baſis, (non autem in ejus peripheria) & a puncto M ducatur quævis recta ſecans peripheriam baſis in punctis K, L; occurrant ſibi invicem in puncto quovis P duæ rectæ, quarum una POG vel PT ſit baſi coni parallela & ſecet ſuperficiem in punctis O, G, vel ipſam contingat in T, & altera PEF ſit parallela rectæ BM; primo ſecet hæc recta PEF eandem ſuperficiem vel ſuperficies oppoſitas in punctis E, F; erit rectangulum EPF, ad rectangulum OPG vel quadratum ex PT, ut quadratum ex BM ad rectangulum KML, ubicunque cadat P rectarum occurſus.

Agatur enim per rectam POG planum baſi Coni parallelum conficiens circulum DOHG, & per parallelas BM, PEF tranſeat planum occurrens ſuperficiebus in rectis QEA, RFC, plano baſis in recta MCA, & plano circuli DOHG in recta DPH; rectæ MCA, DPH erunt parallelæ (per 16, 11.) ergo ſimilia ſunt triangula EPD, BMA, ut & triangula FPH, BMC, & inde erit

EP

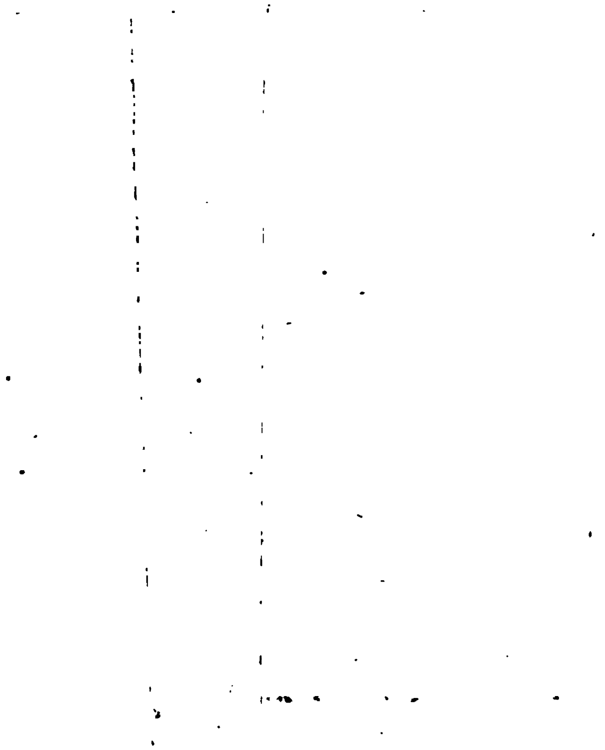


Fig. 14.

UNIV. OF MICH.

FIG. 12,
13.

EP ad DP, ut BM ad AM, & erit PF ad PH, ut BM ad MC, ergo (ducendo antecedentes unius ordinis proportionalium in antecedentes alterius & conſequentes in conſequentes) erit rectangulum EPF ad rectangulum DPH, ut quadratum ex BM ad rectangulum AMC (per 23. 6.) ſed propter DOHG & ASC circulos, erit rectangulum DPH æquale rectangulo OPG vel quadrato ex PT, & rectangulum AMC æquale rectangulo KML (per 35, & 36. 3.) eſt igitur rectangulum EPF ad rectangulum OPG vel quadratum ex PT, ut quadratum ex BM, ad rectangulum KML, ubicunque cadat punctum P rectarum EF, OG occurſus.

Si vero recta EF ipſi BM parallela, occurrat in P rectæ PB baſi coni parallelæ & per verticem coni tranſeunti; eodem prorſus modo (ob ſimilia triangula EPB, BMA; & FPB, BMC) oſtendetur rectangulum EPF eſſe ad quadratum ex PB, ut quadratum ex BM ad rectangulum AMC, hoc eſt, KML.

Secundo, cæteris manentibus ut prius, contingat nunc recta PF ſuperficiem in F; per contactum F ducatur latus coni occurrens baſi in N; planum tranſiens per parallelas PF, BM continget ſuperficiem in recta BFN (cor. 3. 3. hujus) & interſectio ejus MN cum plano baſis, continget baſim in N; ſit recta PT interſectio ejuſdem plani cum plano circuli OTG in quo eſt punctum P, hæc recta continget circulum OTG in T puncto ſciz. in recta BFN, & erit parallela ipſi MN (per 16. 11.) ergo propter ſimilia triangula FPT, BMN, quadratum ex PF erit ad quadratum ex PT vel rectangulum OPG, ut quadratum ex BM ad quadratum ex BN, ſive, rectangulum KML. Fig. 14.

Q. E. D.

PROP. XI.

Si duæ rectæ ſibi invicem occurrentes ſint duabus rectis poſitione datis ſemper parallelæ; prout ambæ contingant, aut ſecent, vel earum una contingat, & altera ſecet, ſuperficiem conicam vel ſuperficies oppoſitas; quadrata ex contingentium ſegmentis, vel rectangula contenta ſecantium ſegmentis, inter rectarum occurſum & puncta quibus occurrunt ſuperficiei vel ſuperficiebus, erunt ad ſe invicem in eadem ratione ubicunque cadat rectarum occurſus.

Caſ. 1. QUANDO utraque recta eſt baſi coni parallela, planum per eas tranſiens erit plano baſis parallelum (15. 11.) et proinde ſecabit alterutram ſuperficiem in circumferentia circuli; ideoque ambæ rectæ contingent, vel ſecabunt, vel una continget, altera ſecabit, eundem circulum, & igitur quadrata ex contingentium ſegmentis, vel rectangula contenta ſecantium ſegmentis, inter rectarum occurſum & puncta quibus ſuperficiei occurrunt, erunt ad ſe invicem in ratione æqualitatis per 35, & 36. 3.

Caſ. 2. Quando una rectarum ſibi invicem occurrentium eſt parallela rectæ poſitione datæ ſecanti planum baſis, & altera eſt parallela rectæ poſitione datæ in plano baſis ductæ, hæc recta erit ſemper parallela ipſi plano baſis & proinde hic caſus propoſitionis conſtat ex propoſitione præcedenti.

Caſ. 3. Quando neutra rectarum ſibi invicem occurrentium eſt plano baſis parallela; per earum occurſum ducatur recta plano baſis parallela, ſecans alterutram ſuperficiem, vel fortaſſe per verticem coni tranſiens; tum prout utraque recta baſi non parallela contingat vel ſecet ſuperficiem, vel ſuperficies oppoſitas, quadratum ex ſegmento vel rectangulum ex ejus ſegmentis habebit ad quadratum ex ſegmento vel ad rectangulum ex ſegmentis rectæ

baſi

baſi parallelæ, eandem ſemper rationem (per prop. præc.) & proinde hæc quadrata vel rectangula, ex ſegmentis rectarum quæ baſi non ſunt parallelæ, habebunt ad ſe invicem eandem ſemper rationem. Ut conſtat ex 22. 5.

In hac & præcedenti propoſitione quando una rectarum ſibi invicem occurrentium per verticem coni tranſit, ſumitur quadratum ex ejus ſegmento inter rectarum occurſum & verticem, quaſi iſta recta foret contingens; quamvis cadat intra ſuperficiem conicam.

PROP. XII.

Si duæ rectæ ſibi invicem parallelæ occurrant cuivis rectæ lateri coni parallelæ; prout ambæ contingant, aut ſecent, vel earum una contingat, & altera ſecet, ſuperficiem conicam vel ſuperficies oppoſitas; quadrata ex contingentium ſegmentis, vel rectangula contenta ſecantium ſegmentis, inter ſuperficiem vel ſuperficies, & rectam cui occurrunt, erunt inter ſe ut ſegmenta iſtius rectæ inter ipſas parallelas, & punctum in quo ſuperficiei conicæ occurrit.

SIT MBC conus, & ſint rectæ EF, LN inter ſe parallelæ, et ponantur utcunque ſecare ſuperficiem vel ſuperficies in E, F et L, N punctis, & occurrant in punctis P, Q rectæ ST lateri coni *c*BC parallelæ et occurrenti ſuperficiei in V; erit rectangulum EPF ad rectangulum LQN, ut PV ad QV. Fig. 15.

Nam per parallelas *c*BC et ST tranſeat planum iterum occurrens ſuperficiebus in recta *m*BM, & per puncta P, Q ducantur in hoc plano rectæ MPC, DQH inter ſe parallelæ, occurrentes ſuperficiei in M, C & D, H; tum (per præced.) erit rectangulum EPF ad rectangulum MPC, ut rectangulum LQN ad rectangulum DQH; ergo erit (alternando) rectangulum EPF ad LQN, ut rectangulum MPC ad DQH, hoc eſt, propter æquales PC, QH, (utpote oppoſita latera parallelogrammi,)

parallelogrammi) ut recta MP ad DQ, ſive ob ſimilia triangula ut ipſa PV ad QV; quod eodem modo oſtendi poteſt de quadratis ſegmentorum parallelarum inter rectam ST & contactus, ſi una vel utraque earum eſſet contingens. Q. E. D.

PROP. XIII.

Contingant duæ rectæ ſibi invicem parallelæ, ſuperficiem, vel ſuperficies oppoſitas, & in iis ſumantur duo puncta a punctis contactus æquidiſtantia, ſi recta hæc puncta conjungens occurrat ſuperficiei vel ſuperficiebus; erunt ejus ſegmenta inter contingentes & ſuperficiem vel ſuperficies, æqualia.

Fig. 16, SINT rectæ EP, RQ parallelæ & contingant eandem ſuperficiem vel oppoſitas ſuperficies in E, R; ſint puncta P, Q a punctis E, R æquidiſtantia, & ducatur PQ ſecans ſuperficiem vel ſuperficies oppoſitas in punctis F, G; erunt ſegmenta PF, QG æqualia.

Nam quoniam rectæ EP, RQ ſunt parallelæ & eadem recta PQ ipſis occurrit, erit (per 11. hujus) quadratum ex EP ad rectangulum FPG, ut quadratum ex RQ ad rectangulum GQF, ſed æqualia ſunt quadrata ex EP & RQ (per hypoth.) ergo æqualia ſunt rectangula FPG & GQF; biſariam ergo ſecetur recta FG in O; et cum puncta F, G ſint in eadem ſuperficie, æqualibus rectangulis FPG, GQF addantur æqualia quadrata ex OF et OG & ſummæ id eſt (per 6. 2.) quadrata ex OP, OQ erunt æqualia; et cum F, G ſint in ſuperficiebus oppoſitis, ab æqualibus quadratis ex OF, OG auferantur æqualia rectangula FPG, GQF & reliqua id eſt (per 5. 2.) quadrata ex OP, OQ erunt æqualia: ergo ipſæ rectæ PO, QO in utroque caſu ſunt æquales; ſed æquales ſunt ipſæ FO, GO ergo æqualia ſunt ſegmenta PF, QG.

Si vero recta PQ contingat ſuperficiem in puncto V; erit ut prius (per 11 hujus) quadratum ex EP, ad quadratum ex VP, ut quadratum

quadratum ex RQ, ad quadratum ex VQ: ergo æqualia ſunt quadrata ex VP, VQ, et ergo ipſa ſegmenta VP, VQ ſunt æqualia. Q.E.D.

Cor: Contingant rectæ parallelæ PF, QH ſuperficiem conicam in punctis E, R, jungatur ER & per punctum in ea O ducatur recta ipſis PF, QH parallela, occurrens ſuperficiei in duobus punctis M, N; ſi per hæc puncta M, N, ducantur duæ rectæ ipſi ER parallelæ & occurrentes ipſis PF, QH in punctis F, H & P, Q, hæ rectæ ſimul occurrent ſuperficiei iterum ut in punctis G, L, vel ſimul ipſam contingent in punctis M, N. Per conſtructionem (& 34. 1). contingentes EF, RH ut & EP, RQ ſunt æquales, ſi igitur recta FMH ſuperficiei occurrat in punctis M, G erunt FM, GH æquales (per hanc prop.) & ſi recta PNQ ponatur contingere ſuperficiem in N erunt PN, NQ æquales, ergo, propter parallelas PF, NM, QH, erunt FM, MG æquales, quod eſt abſurdum; ergo cum recta FMH ſuperficiei occurrat in duobus punctis, recta PNQ non continget ſuperficiem in N & proinde ei iterum occurret, ideoque hæ rectæ FMH, PNQ vel ſimul ſecabunt ſuperficiem conicam, vel eam ſimul contingent. Fig. 17.

PROP. XIV.

Recta linea conjungens bina puncta contactus parallelarum contingentium, bifariam ſecat omnes rectas quibus occurrit, quæ ſunt iſtis contingentibus parallelæ & utrinque ab alterutra ſuperficierum terminatæ.

SINT rectæ EP, RQ, ſibi invicem parallelæ, et contingant eandem ſuperficiem, vel ſuperficies oppoſitas, et ducatur ER conjungens puncta contactus; tum ſit recta MN ipſis EP, RQ parallela & occurrat ipſi ER (ſi opus productæ) in puncto O, & ſit terminata ſuperficie conicâ in M, N, punctis; erunt ſegmenta MO & ON, æqualia. Fig. 17, 18.

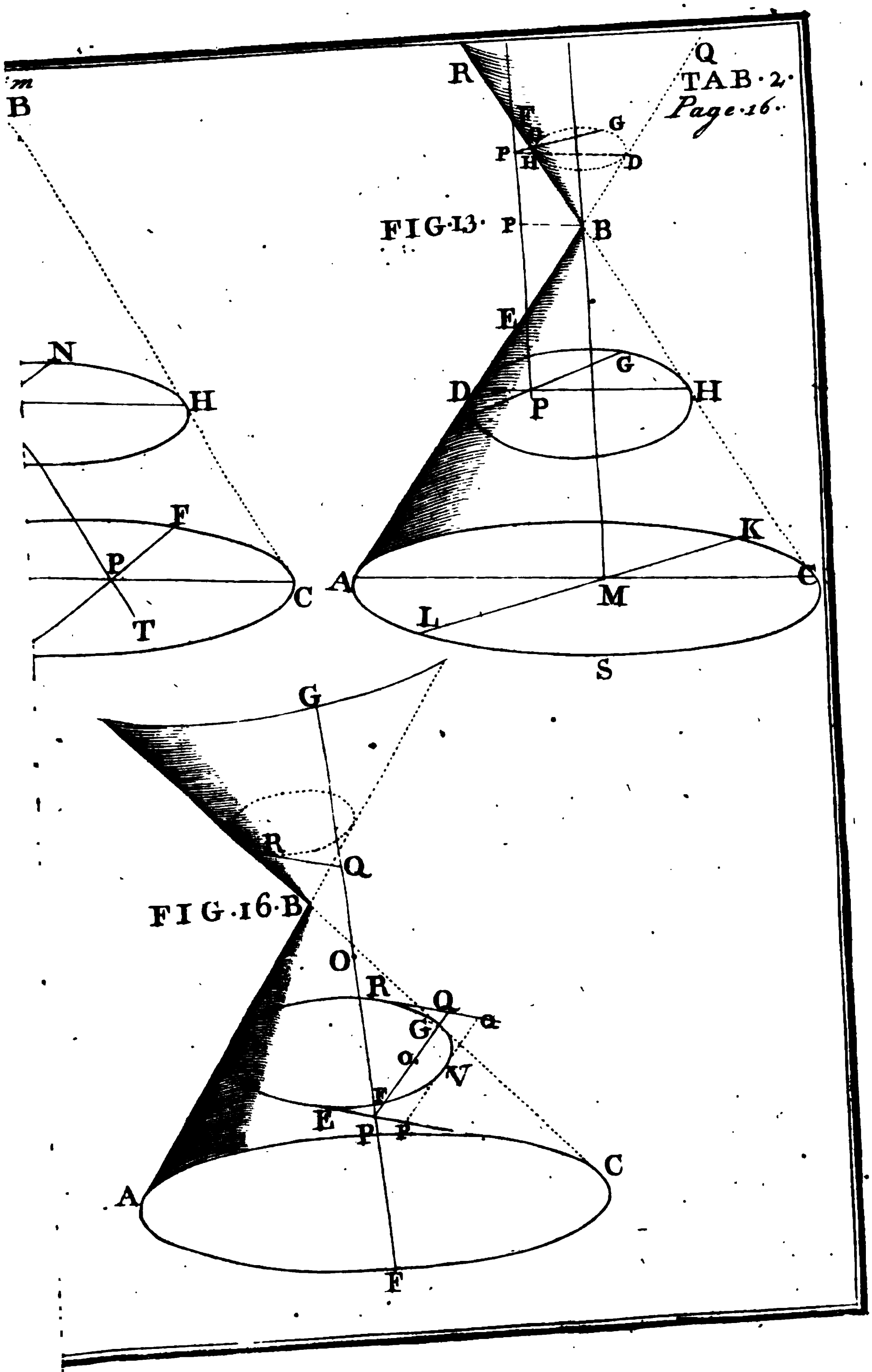
æqualia. Ducantur enim per puncta M, N, duæ rectæ ipſi ER, parallelæ, & primo, ambæ occurrentes eidem vel oppoſitæ ſuperficiei iterum in G, L (per Cor. præc.) et contingentibus parallelis in punctis F, H et P, Q; tum (propter parallelogramma) erunt rectæ MF, NP æquales, ut et FH, PQ & etiam contingentes EP, RQ. ergo (per præced.) erunt rectæ NP, QL æquales, et eodem modo oſtendetur MF, HG eſſe æquales; ergo æquales ſunt PL, FG & proinde æqualia ſunt rectangula NPL, MFG, ſed (per 11 hujus) rectangulum NPL eſt ad quadratum ex PE, ut rectangulum MFG ad quadratum ex EF; ergo æqualia ſunt quadrata ex EP et EF, ergo ipſæ rectæ FE, EP ſunt æquales, et ergo, propter parallelas, erunt ſegmenta MO, ON æqualia.

Fig. 17. Cum puncta E, R ſunt in oppoſitis ſuperficiebus, rectæ per M, N ductæ ipſi ER parallelæ, neceſſario occurrent ſuperficiei oppoſitæ per Cor. 2. 6 hujus. Cum autem puncta E, R ſunt in eadem ſuperficie, ſi una rectarum, quæ per M, N ductæ ſunt ipſi ER parallelæ, contingat hanc ſuperficiem in puncto M, eam continget altera recta in N (per Cor. præc.) occurrant vero hæ rectæ contingenti EPF in X, V punctis; tum (propter parallelogramma) erunt contingentes MX, NV æquales, ergo (per præced.) erunt contingentes XE, EV æquales, ergo, propter parallelas, erunt ſegmenta MO, ON, æqualia. Q. E. D.

DEFINITIONES.

Fig. 19. XI. Si planum ADE ſuperficiem conicam ſecundum rectam AD contingat, et ſuperficies ſecetur plano ipſi ADE parallelo, ſectio MVN, dicitur *Parabola.*

XII.


TAB. 2.
Page. 16.
FIG. 13.
FIG. 16.
R
Q
B
E
D
P
H
G
A
K
C
M
L
S
N
F
T
O
V
F

XII. Si per verticem & extra ſuperficies conicas tranſeat planum DAE, nec plano baſis nec plano ſectionis ſubcontrariæ parallelum, et ſuperficierum alterutra ſecetur plano XVLT ipſi DAE parallelo; ſectio MUNL, dicitur *Ellipſis*. FIG. 20.

XIII. Si per verticem A coni BAG tranſeat planum ſecans ſuperficies in rectis *d*AD, *e*AE, et ſuperficies conica ſecetur plano XVM ipſi EAD parallelo; ſectio MVN, dicitur *Hyperbola*. Et quoniam hoc planum ſecans, neceſſario occurrit ſuperficiei oppoſitæ, ibi faciet ſectionem *m*L*n* ejuſdem generis ac nominis cum priori; & hæ duæ ſectiones conjunctim, dicuntur *Sectiones Oppoſitæ*. FIG. 21.

XIV. Planum ADE per verticem coni tranſiens & plano cujuſvis ſectionis parallelum, dico *Planum Verticale* iſtius ſectionis.

XV. Quævis recta LV ducta in plano Parabolæ, parallela rectæ AD ſecundum quam planum verticale contingit ſuperficiem; dicitur *Diameter Parabolæ*, & punctum V in quo ſectioni occurrit, dicitur ejus *Vertex*. FIG. 19.

XVI. Punctum, intra Ellipſim, aut inter ſectiones oppoſitas, in quo bifariam ſecatur omnis recta per ipſum ducta, et Ellipſi, aut ſectionibus oppoſitis utrinque terminata, dico *Centrum* Ellipſeos, aut Hyberbolæ vel ſectionum oppoſitarum.

XVII. Quamvis rectam, per centrum Ellipſeos aut Hyperbolæ ductam, & occurrentem Ellipſi aut ſectionibus oppoſitis in duobus punctis, dico *Diametrum* Ellipſeos, aut *Diametrum Tranſverſam* Hyperbolæ vel ſectionum oppoſitarum. Et puncta in quibus diameter occurrit Ellipſi, aut ſectionibus oppoſitis, dicuntur *Vertices* ejus.

XVIII. Quævis recta per centrum Hyperbolæ ducta, et bifariam ſecans rectam per centrum non tranſeuntem & terminatam ſectionibus oppoſitis, dicitur *Diameter Secunda* Hyperbolarum.

XIX. Duæ diametri, quarum utraque bifariam ſecat omnes rectas Ellipſi, Hyperbolâ, vel Hyperbolis oppoſitis terminatas & alteri parallelas, dicuntur *Diametri Conjugatæ* Ellipſeos aut Hyperbolæ.

XX. Recta quævis, per centrum non tranſiens, ſectione conicâ vel ſectionibus oppoſitis utrinque terminata, & a diametro bifariam ſecta, dicitur *Ordinatim Applicata* diametro, vel ſimpliciter *Ordinata* huic diametro: & ſæpius dimidium hujuſce rectæ dicitur *Ordinata*.

XXI. Segmenta diametri inter ordinatam ejus & vertices, dicuntur *Abſciſſæ*.

XXII. Diameter ſectionis conicæ, quæ ad angulos rectos ordinatas ſuas ſecat, dicitur *Axis*.

XXIII. Recta in plano ſectionis conicæ ducta, occurrens ſectioni in uno puncto, & utrinque producta extra ipſam cadens, dicitur ſectionem in hoc puncto *contingere*; & ipſa recta, dicitur *Contingens*.

Si vero, in duobus punctis recta ſectioni vel ſectionibus oppoſitis occurrat; dicitur *Secans*.

Corollaria ad Definitiones præcedentes.

Cor. I. Cum quodlibet punctum ſectionis conicæ ſit in ſuperficie conica, & duo quælibet puncta in oppoſitis ſectionibus ſint in oppoſitis ſuperficiebus; patet omnem rectam lineam in plano ſectionis conicæ ductam, quovis modo ſuperficiei conicæ vel ſuperficiebus oppoſitis occurrentem, eodem modo & in eodem puncto vel iiſdem punctis ſectioni conicæ vel ſectionibus oppoſitis occurſuram. Et contra, patet omnem rectam lineam quovis modo ſectioni conicæ vel ſectionibus oppoſitis occurrentem, eodem modo & in eodem puncto vel iiſdem punctis ſuperficiei conicæ vel ſuperficiebus oppoſitis occurſuram.

Cor. II. Recta linea conjungens bina quæcunque puncta in ſectione conica, tota cadit intra ſectionem, producta vero utrinque extra eandem cadit, & neque ei, nec oppoſitæ ſectioni, occurrit iterum.

Contra,

Contra, recta conjungens bina puncta in oppoſitis ſectionibus, cadit extra utramque ſectionem, producta vero utrinque, intra utramque tranſit, & neutri earum iterum occurrit. Conſtat hoc ex Corol. 2. ex præcedenti & Propoſitione 4. hujus. Hinc, vel ex Cor. 5. hujus, patet rectam lineam ſectioni conicæ vel ſectionibus oppoſitis in tribus punctis non occurrere.

Cor. III. Hinc, eadem recta oppoſitas ſectiones contingere nequit.

Cor. IV. Hinc etiam, ſi recta ducatur in plano ſectionum oppoſitarum, parallela rectæ jungenti bina puncta in oppoſitis ſectionibus; ipſa neceſſario occurret oppoſitis ſectionibus, ut conſtat ex Cor. 2. Prop. 6.

Cor. V. Omnes diametri alicujus Parabolæ ſunt inter ſe parallelæ, & quævis recta ducta in plano parabolæ diametris parallela, erit ipſa diameter, ut conſtat ex definitione: & quævis diameter occurrit Parabolæ in unico puncto, & eſt, ex una parte, tota extra Parabolam; & ex altera, tota intra illam; ut conſtat ex Prop. 5. & Cor. 1. ad definitiones.

Cor. VI. Cum plana Parabolæ & Hyperbolæ ſuperficiem conicam ad infinitum productam ſecent, patet haſce ſectiones ad infinitum extendi poſſe, nec unquam in ſe redire, aut ſpatium claudere. Ellipſis vero, cum conum ambit, in ſe revoluta ſpatium undique claudit.

Cor. VII. Omnis confectio ipſum conum ambiens, eſt aut Circulus, aut Ellipſis. Nam ſi planum ſectionis ſit baſi parallelum, aut ſubcontrarie poſitum, ſectio erit Circulus, & ſi non, erit Ellipſis per Def. 12. & Cor. 9. hujus.

PROP. XV.

Si per punctum intra Parabolam ducatur recta diametros ſecans; neceſſario occurret Parabolæ in duobus punctis.

FIG. 19. SIT conus BAD, & in ejus ſuperficie ſectio MVN Parabola, & planum ADE ejus planum verticale contingens ſuperficiem in recta AD, ſit recta LV diameter Parabolæ; per punctum P intra Parabolam, ducatur recta MN ſecans diametros, occurret Parabolæ in duobus punctis.

Nam per verticem coni A, ducatur in plano verticali, recta AF ipſi MN parallela; tum propter parallelas PN, FA & PL, AD, erunt anguli NPL, FAD æquales (10, 11.) ergo AF ſecabit rectam AD in qua ſola planum verticale ſuperficiei occurrit: ergo AF cadit tota extra ſuperficiem: ergo (per 6. huj.) recta MN, ipſi AF parallela, occurret ſuperficiei, intra quam ſumptum eſt P, in duobus punctis puta M, N; ergo in iiſdem punctis occurret ipſi Parabolæ per Coroll. 1. Def.

PROP. XVI.

Per quodvis punctum ſectionis conicæ, duci poteſt unica recta, quæ ipſam ſectionem in iſto puncto contingat.

FIG. 19. SIT conus BAD, & in ejus ſuperficie, ſectio quævis conica MVN; in ea ſumatur punctum quodvis V, & per V, ducatur latus coni AVB, & per punctum B in quo latus AVB circumferentiæ baſis occurrit, ducatur BK baſim contingens; tum planum ABK ſuperficiem continget (Cor. 2, 3. huj.) & recta VX communis interſectio plani contingentis ABK, cum plano ſectionis, continget ſectionem in puncto V.

Nam

Nam recta VX eſt tota in plano ABK ſuperficiem contingente, & occurrit lineæ contactus in puncto V, ergo in hoc puncto contingit ſuperficiem. Sed recta VX eſt quoque in plano ſectionis MVN quam ergo continget in puncto eodem V (per. Cor. 1. Def.) Si nunc quævis alia recta, in plano ſectionis, præter VX, ponatur contingere ſectionem MVN in puncto V, in hoc puncto etiam contingeret ſuperficiem conicam: & cum hæc recta ſit extra planum ABK, planum per eam, & rectam AB, ductum, erit diverſum a plano ABK, & ſuperficiem in recta AB continget (per Cor. 3, 3. huj.) ergo duo plana contingerent ſuperficiem in eadem recta, contra Cor. 4, 3. hujus: ergo una tantum recta contingere poteſt ſectionem conicam in eodem puncto.

Cor. Hinc, recta quævis MN, ducta per punctum P intra ſectionem conicam, parallela cuivis contingenti VX; ſectioni in duobus punctis occurret.

Nam ſit recta AF communis interſectio plani contingentis ABK in quo eſt contingens VX, cum plano verticali ADE, erit (per 16, 11.) parallela contingenti VX, & proinde rectæ MN per P ductæ: Sed recta AF, quoniam ſit in plano contingente & a linea contactus AB diverſa, cadit tota extra ſuperficies; ergo recta per P ducta, occurret ſuperficiei, intra quam ſumptum eſt P, in duobus punctis, puta M, N, per 6. hujus: ergo ipſi ſectioni in iiſdem punctis occurret per Cor. 1. Def.

PROP. XVII.

Sit recta MN ſectione conicâ terminata; unica recta ipſi parallela, contingere poteſt ſectionem, ſi ſit Parabola; & ſi ſit Hyperbola, una tantum recta ipſi MN parallela, eam contingere poteſt, & una Hyperbolam oppoſitam; & ſi ſit Ellipſis, duæ rectæ ipſi MN parallelæ, eam contingere poſſunt. Fig. 19, 20, 21.

SIT enim ſectio MVN Parabola, a qua terminatur recta MN; & per verticem coni A ducatur in plano verticali, recta AF Fig. 19.

ipſi

ipſi MN parallela, quæ (per Cor. 3, 6. huj.) cadet extra ſuperficies conicas, & quoniam recta AF ſit in plano ADE ſuperficiem contingente, tranſire poteſt per ipſam AF (per 4 huj.) alterum planum ABK, quæ ſuperficiem contingat in recta quadam AB: hoc planum neceſſario ſecabit planum Parabolæ, puta in recta VX, hæc continget Parabolam in V (per præced.) & erit (16. 11.) parallela rectæ AF, & proinde ipſi MN Parabolâ terminatæ.

Si vero (manentibus jam poſitis) alia quævis recta YZ, parallela ipſi MN, ponatur contingere Parabolam; per verticem A & contactum Y ducatur latus coni; contingens YZ eſt (per hypoth.) parallela ipſi AF, & (per Cor. 3, 3. huj.) planum per has parallelas tranſiens continget ſuperficiem in recta AY; ſed hoc planum neceſſario erit diverſum a planis contingentibus ADE, ABK; ergo tria plana ſuperficiem contingentia, tranſirent per rectam AF, contra Cor. 4. hujus.

FIG. 20, 21. Sit nunc ſectio MVN Ellipſis, aut Hyperbola, & mLn Hyperbola oppoſita, & ſit MN Ellipſi aut Hyperbolâ terminata. Per verticem coni A ducatur, in plano verticali, recta AF ipſi MN parallela, cadens (per Cor. 4. 6. huj.) extra ſuperficies, & per AF ducantur duo plana ABK, AGH contingentia ſuperficies in rectis AVB, ALG, (per 4. huj.) cum hæc plana ſecant planum verticale ADE in recta AF, ſecabunt quoque planum Ellipſeos, aut ſectionum oppoſitarum, in duabis rectis, VX, LT, ipſi AF parallelis (16. 11.) ſed hæ rectæ VX, LT contingunt Ellipſim, aut oppoſitas Hyperbolas (per præced.) & quoniam ſunt parallelæ rectæ AF, erunt parallelæ ipſi MN:

Si nunc manentibus jam poſitis, quævis tertia recta parallela ipſi MN, ponatur contingere Ellipſim aut Hyperbolam, eodem modo, ut in priori caſu, oſtendi poteſt, tria plana ſuperficiem contingentia tranſire per rectam AF, quod eſt abſurdum per Cor. Prop. 4. hujus.

COR.

Cor. I. Hinc patet, quod ſi quævis recta contingat Ellipſim, aut Hyperbolam, duci poteſt una alia recta quæ Ellipſim, aut oppoſitam Hyperbolam, contingat, & ſit priori contingenti parallela.

Cor. II. Hinc etiam patet, quod ſi a puncto Parabolæ, ducatur recta parallela cuivis contingenti, Parabolæ iterum occurret; nam ipſam nequit contingere (per partem primam huj.) ergo ex una parte cadet intra Parabolam, & ergo (per Cor. Prop. præced.) ipſi iterum occurret. Eodem modo oſtendi poteſt, rectam a puncto Ellipſeos, aut Hyperbolæ ductam, parallelam duabus contingentibus, Ellipſi, aut Hyperbolæ iterum occurrere.

MONITUM.

MONENDUS eſt lector, quod inter ſectiones conicas numeratur circulus, nam quicquid in ſequentibus, de tribus ſectionibus jam definitis probatur univerſaliter, id etiam circulo convenit; ut plerumque ex elementis Geometriæ conſtat.

PROP. XVIII.

Si duæ rectæ ſibi invicem occurrentes, ſint duabus rectis poſitione datis ſemper parallelæ, prout ambæ contingant, aut ſecent, vel earum una contingat, & altera ſecet ſectionem conicam vel ſectiones oppoſitas; quadrata ex contingentium ſegmentis, vel rectangula contenta ſecantium ſegmentis, inter rectarum occurſum, & ſectionem, vel ſectiones, erunt ad ſe invicem ſemper in eadem ratione, ubicunque cadat rectarum occurſus.

CONSTAT hæc Propoſitio ex Propoſitione 11. hujus, & Cor. 1. ad Definitiones.

Cor.

Fig. 22, 23. Cor. I. Hinc, ſi recta quævis LCV ſecans ſectionem conicam, vel oppoſitas ſectiones, in punctis L, V, occurrat in punctis O, S duabus parallelis ſecantibus eandem ſectionem, vel oppoſitas ſectiones, vel utraſque ſectiones oppoſitas, in punctis A, B & H, G; rectangula BOA, HSG contenta ſegmentis parallelarum inter ſectionem, vel ſectiones, & rectam LCV erunt inter ſe, ut rectangula VOL, VSL contenta ſegmentis ipſius LCV inter parallelas, & ſectionem vel ſectiones.

Nam quoniam rectæ BA, LVO ſunt parallelæ iiſdem rectis, quibus ipſæ HG, LVO ſunt parallelæ; in quacunque ratione ſit rectangulum BOA ad rectangulum VOL, in eadem ratione erit rectangulum HSG ad rectangulum VSL, per hanc Propoſitionem: ergo, alternando, BOA eſt ad HSG, ut VOL ad VSL.

Cor. II. Vel ſi recta quævis ſecans ſectionem, vel ſectiones oppoſitas, occurrat duabus rectis parallelis contingentibus eandem ſectionem, vel oppoſitas ſectiones; eodem modo oſtendi poteſt, quod quadrata ex ſegmentis contingentium parallelarum inter earum contactus, & ſecantem cui occurrunt, erunt inter ſe, ut rectangula contenta ſegmentis iſtius ſecantis, inter ipſas parallelas, & ſectionem, vel ſectiones.

Cor. III. Vel ſi recta quævis ſecans ſectionem, vel ſectiones oppoſitas, occurrat duabus parallelis, quarum una eſt contingens, & altera ſecans; quadratum ex ſegmento contingentis, & rectangulum contentum ſegmentis ſecantis, inter ſectionem, & ſecantem cui occurrunt, erunt inter ſe, ut rectangula contenta ſegmentis iſtius ſecantis inter ipſas parallelas, & ſectionem, vel ſectiones.

Cor. IV. Vel ſi recta quævis contingens ſectionem conicam, occurrat duabus parallelis ſecantibus ſectionem, vel ſectiones; rectangula contenta ſegmentis ſecantium inter ſectionem, vel ſectiones, & contingentem cui occurrunt, erunt inter ſe ut quadrata ſegmentorum contingentis inter ipſas parallelas, & ejus contactum.

Cor. V. Vel ſi recta quævis contingens ſectionem conicam, occurrat duabus parallelis contingentibus eandem ſectionem, vel ſectiones oppoſitas; quadrata ex ſegmentis parallelarum contingentium

tium inter earum contactus, & contingentem cui occurrunt, erunt inter ſe ut quadrata ex ſegmentis iſtius contingentis inter ipſas parallelas & ejus contactum.

Cor. VI. Vel ſi recta quævis contingens ſectionem conicam, occurrat duabus parallelis, Quarum una eſt contingens, & altera ſecans; quadratum ex ſegmento contingentis, & rectangulum contentum ſegmentis ſecantis inter ſectionem & contingentem cui occurrunt, erunt inter ſe ut quadrata ex ſegmentis iſtius contingentis inter ipſas parallelas, & ejus contactum.

PROP. XIX.

Si duæ rectæ ſibi invicem parallelæ occurrant cuivis rectæ lateri coni parallelæ, & ambæ contingant, aut ſecent, vel earum una contingat, & altera ſecet ſectionem conicam vel ſectiones oppoſitas; quadrata ex contingentium ſegmentis, vel rectangula contenta ſecantium ſegmentis, inter rectam cui occurrunt, & ſectionem vel ſectiones, erunt inter ſe ut ſegmenta iſtius rectæ inter ipſas parallelas, & punctum in quo occurrit ſectioni conicæ.

NAM hæc recta, cui parallelæ occurrunt, quoniam eſt parallela lateri coni, conveniet cum ſuperficie coni, & proinde cum ipſa ſectione conica (in cujus plano eſt) in unico puncto (per Prop. 5. & Cor. 1. Def.) unde conſtat Propoſitio per Prop. 12. & Cor. 1. Def.

Fig. 24.

Cor. Hinc ſi linea MVN ſit Parabola in ſuperficie coni poſita, & eam ſecent rectæ parallelæ MN & AB occurrentes diametro ejus LV in D, C; rectangula MDN, ACB contenta ſegmentis parallelarum inter diametrum & Parabolam, erunt inter ſe ut DV, CV ſegmenta diametri inter parallelas, & verticem ejus V. Vel ſi recta XT parallela ipſi MN contingat Parabolam in T, & occurrat diametro

metro LV in X; erit rectangulum MDN ad quadratum ex TX, ut DV ad XV.

Nam per Definitionem 15, quævis diameter Parabolæ eſt parallela lateri coni, ei ſciz. in quo planum verticale contingit ſuperficiem in qua poſita eſt Parabola. Unde liquet Corollarium ex hac Prop.

PROP. XX.

Contingant duæ rectæ ſibi invicem parallelæ Ellipſim, aut Hyperbolas oppoſitas, & in iſtis contingentibus ſumantur duo puncta a punctis contactus æquidiſtantia. Si recta hæc puncta conjungens ſecet Ellipſim, aut Hyperbolas oppoſitas in duobus punctis, erunt ejus ſegmenta, inter hæc puncta & contingentes, æqualia: vel ſi Ellipſim contingat, erunt ſegmenta, inter ejus contactum & contingentes, æqualia.

CONSTAT hæc Propoſitio ex Propoſitione 13. & Corollario 1. Def.

PROP. XXI.

Contingant duæ rectæ ſibi invicem parallelæ Ellipſim, aut Hyperbolas oppoſitas; recta earum contactus jungens bifariam ſecabit omnes rectas ab Ellipſi, aut utrâvis Hyperbolâ terminatas & contingentibus parallelas.

NAM omnes rectæ contingentibus parallelæ, neceſſario occurrent rectæ jungenti contactus; unde liquet propoſitum ex Prop. 14. & Cor. 1. Def.

FIG. 22, 23. COR. I. Hinc ſi duæ rectæ inter ſe parallelæ AB & GH, utrinque terminentur Ellipſi, Hyperbolâ vel diverſis & oppoſitis Hyperbolis; recta OS, utraſque bifariam ſecans, occurret Ellipſi, vel Hyperbolis

Hyperbolis in duobus punctis, per quæ ſi contingentes ducantur, erunt parallelæ rectis biſariam ſectis.

Intelligantur enim duæ rectæ VX, LT parallelæ rectis AB, GH contingere Ellipſim aut oppoſitas Hyperbolas (per Prop. 17.) in punctis V, L; tum recta LV jungens earum contactus biſariam ſecabit rectas AB, GH & proinde coincidet cum ipſa OS: ergo conſtat Corollarium.

Cor. II. Hinc ſi rectæ AB, GH inter ſe parallelæ, et terminatæ Ellipſi Hyperbolâ aut diverſis & oppoſitis Hyperbolis, biſariam ſecentur rectâ OS; & per puncta V & L in quibus recta biſecans occurrit Ellipſi aut Hyperbolis, ducantur rectæ VX, LT parallelæ rectis biſectis, erunt contingentes; nam ſi non (per Cor. præced.) contingentes per hæc puncta ductæ erunt quoque parallelæ rectis AB, GH, quod eſt abſurdum.

Cor. III. Hinc patet methodus ducendi duas rectas contingentes Ellipſim aut oppoſitas Hyperbolas, quæ parallelæ ſint rectæ poſitione datæ, & ſecanti Ellipſim aut Hyperbolam; nempe ducatur altera ſecans huic datæ ſecanti parallela, biſariam ſecentur hæ parallelæ, & per puncta in quibus recta biſecans occurrit Ellipſi aut Hyperbolis, ducantur duæ rectæ parallelæ rectæ poſitione datæ; hæ erunt contingentes, per Cor. præc.

PROP. XXII. PROBL. II.

Ellipſi aut Hyperbolis oppoſitis, poſitione datis, invenire centrum; & unicum eſſe centrum cujuſvis Ellipſeos aut Hyperbolæ demonſtrare.

SIT linea VAGHB, Ellipſis aut Hyperbola, & ſit *m* L *n* Hyperbola huic oppoſita: ducantur duæ rectæ ſibi invicem parallelæ ſecantes Ellipſim aut Hyperbolam in punctis A, B & G, H, ducatur recta OS biſariam ſecans parallelas AB, GH, & occurrens (per Cor. Fig. 22, 23.

D 2 1. præced.)

1. præced.) Ellipſi aut oppoſitis Hyperbolis in duobus punctis puta V,L, bifariam ſecetur recta VL in C; erit iſtud punctum C centrum. Nam per puncta V, L ducantur rectæ VX, LT parallelæ ipſis AB, GH; erunt VX, LT contingentes per Cor. 2. præced. ducatur ergo per punctum C quævis recta occurrens Ellipſi aut Hyperbolis oppoſitis in punctis E, F & contingentibus VX, LT in Q, P; tum propter ſimilia triangula CVQ, CLP, & rectas CV, CL æquales, erunt rectæ CQ, CP æquales, & etiam contingentes VQ, LP; ergo erunt rectæ QE, PF æquales (per 20. hujus) ergo æquales ſunt ipſæ CE, CF. Si vero in Ellipſi recta per C ducta, & ei occurrens in duobus punctis M, N ſit parallela contingentibus VX, LT, bifariam ſecabitur in C (per Propoſitionem præced.) Ergo cum quævis recta per C ducta, & Ellipſi aut oppoſitis Hyperbolis terminata, in hoc puncto C bifariam ſecatur erit hoc punctum C centrum Ellipſeos aut Hyperbolarum per Definitionem 16. *Q. E. I.*

Fig. 23. Si nunc (ſtantibus jam poſitis) ponatur aliud eſſe centrum Hyperbolarum, puta punctum D; per id ducatur recta parallela ipſi VL, occurret oppoſitis Hyperbolis in duobus punctis A, G (Cor. 4. Def.) occurrat vero contingentibus VX, LT in Q, R; erunt (propter parallelogrammum) VQ, LR æquales, ergo æquales erunt QA, RG (per Prop. 20.) ſed propter D centrum (per Hypoth.) æquales ſunt DA, GH, ergo æquales ſunt DQ, DR; ducatur nunc quævis alia recta per D, occurrens Hyperbolis in Y, Z, & contingentibus in I, K; propter D centrum (per Hypoth.) erunt DY, DZ æquales, & propter triangula DQI, DRK ſimilia, & rectas DQ, DR æquales, erunt ipſæ DI, DK æquales; & proinde (per 5. 2.) erunt rectangula YIZ, YKZ æqualia. Sed hæc rectangula ſunt ut quadrata contingentium VI, LK per Cor. 2. Prop. 18. ergo hæc quadrata, & proinde ipſæ rectæ VI, LK æquantur; ergo recta IK parallela eſt rectæ VL, (33. 1.) hoc eſt, ipſi AG, quod eſt abſurdum; ergo nullum aliud punctum præter C eſt centrum Hyperbolarum. Quod eodem prorſus modo oſtendi poteſt de Ellipſi; hoc autem per ſe manifeſtum

eſt,

eſt, nam ſi duo eſſent centra Ellipſeos, recta Ellipſi terminata bifariam ſecaretur in duobus punctis. *Q. E. A.*

Cor. I. Omnes rectæ jungentes contactus duarum parallelarum Ellipſim aut Hyperbolas oppoſitas contingentium, ſe mutuo bifariam ſecant in uno eodemque puncto ſcilicet centro: nam ſi in diverſis punctis bifariam ſecari poſſint, plura eſſent centra Ellipſeos aut Hyperbolarum oppoſitarum, ex prima parte demonſtrationis præcedentis, contra quod in ſecunda oſtenſum eſt.

Cor. II. Quævis recta ut LV, jungens contactus duarum parallelarum contingentium LT, VX, tranſit per centrum & proinde eſt diameter Ellipſeos aut diameter tranſverſa Hyperbolarum, per Def. 17.

Cor. III. Hinc duæ contingentes LT, VX, ductæ per vertices ejuſdem diametri LV Ellipſeos aut Hyperbolarum ſunt parallelæ: Nam ſi non, duci poteſt alia contingens uni earum parallela (Cor. 1. 17. hujus) & recta contactus harum parallelarum jungens tranſiret quoque per centrum (Cor. 1. hujus) quod eſt abſurdum.

Cor. IV. Nulla recta Hyperbolam contingens per centrum ejus tranſit; nam ſi recta quævis contingat Hyperbolam, alia recta ipſi parallela contingere poteſt Hyperbolam oppoſitam (Cor. 1. 17. hujus) & recta earum contactus jungens tranſit per centrum, & proinde neutra ipſarum contingentium per centrum tranſire poteſt.

Cor. V. Hinc quævis recta ducta a centro C Hyperbolæ, ad punctum in ea V, erit ſemidiameter tranſverſa; nam Hyperbolam non continget in V per Cor. præced. ergo per V ducatur VX contingens Hyperbolam, & huic parallela ducatur LT, contingens Hyperbolam oppoſitam; patet jungentem LV eſſe diametrum tranſverſum (per Cor. 2.) & proinde coincidere cum recta CV; ergo hæc recta eſt ſemidiameter tranſverſa.

PROP.

PROP. XXIII.

Omnis recta per centrum Hyperbolæ ducta, parallela rectæ Hyperbolam contingenti, vel in duobus punctis ſecanti, eſt diameter ſecunda.

FIG. 23. PER C centrum Hyperbolarum BVA, *m* L *n* ducatur recta MN parallela cuivis contingenti VX, & per contactum ducatur diameter tranſverſa VCL, & per alterum ejus verticem L ducatur LT contingens oppoſitam Hyperbolam, parallela ipſi VX per Cor. 3. præced. & ducatur quævis recta parallela ipſi VCL occurrens oppoſitis Hyperbolis (per. Cor. 3. Def.) in duobus punctis A, G, & contingentibus VX, LT in Q, R, & rectæ MN in D; tum propter parallelogrammum, erunt contingentes VQ, LR æquales, ergo æquales ſunt rectæ QA, RG (Prop. 20.) & propter VC, CL æquales & CD ipſis VX, LT parallelam, erunt etiam QD, DR æquales, ergo recta AG bifariam ſecatur in D per rectam MN: ergo hæc recta eſt diameter ſecunda per Def. 18. *Q. E. D.*

PROP. XXIV.

Diameter ſectionis cujuſvis conicæ bifariam ſecat omnes rectas a ſectione terminatas, & parallelas contingenti per verticem ejus ductæ.

FIG. 19. PRIMO ſit BAD conus, & in ejus ſuperficie ſectio MVN Parabola, cujus planum verticale ſit ADE, & diameter recta LV, & contingat recta VX Parabolam in V vertice diametri LV, & ſit recta MN parallela ipſi VX, Parabolâ terminata & occurrens diametro LV in P; in hoc puncto bifariam ſecabitur.

Nam ducatur latus coni AV, & per AV, & contingentem VX tranſeat planum ABK, hoc continget ſuperficiem conicam in latere AVB (Cor. 3. 3. huj.) & quoniam AV ſecat parallelas LV, AD, erit in

in eodem cum iis plano (7. 11.) ergo recta LV eſt in plano trianguli BAD: per punctum P ducatur in hoc plano recta quævis occurrens ipſi AD in puncto quodam Q, & ipſi AB in O; per hæc puncta ducantur in planis contingentibus ADE, ABK, rectæ QR, OS parallelæ rectæ AF interſectioni plani contingentis ABK cum plano verticali ADE, hæ rectæ ſuperficiem contingent in punctis Q, O, & quoniam ſunt parallelæ ipſi AF erunt parallelæ contingenti VX (per 16. 11.) ut & ipſi MN (9. 11.) ſed recta MN bifariam ſecatur in P a recta jungente contactus Q, O (per Prop. 14.) & proinde a diametro LV.

Secundo, ſit ſectio Ellipſis aut Hyperbola; & quoniam contingentes ductæ per utramque verticem cujuſvis diametri ſunt inter ſe parallelæ (per Cor. 3. 22. hujus) quævis diameter bifariam ſecabit omnes rectas iſtis contingentibus parallelas, & Ellipſi vel alterutrâ Hyperbolâ terminatas, ut conſtat ex Prop. 21.

PROP. XXV.

Diameter ſecunda MN Hyperbolæ bifariam ſecat omnes rectas Hyperbolis terminatas, & parallelas diametro tranſverſæ LV jungenti contactus contingentium VX, LT, quæ iſti diametro ſecundæ ſunt parallelæ. Et contra, ſi recta AG ſit bifariam ſecta a diametro ſecunda MN, erit parallela diametro tranſverſæ LV jungenti contactus contingentium VX, LT, quæ ſunt iſti diametro ſecundæ parallelæ.

Pars 1. SIT recta AG Hyperbolis BVA, mLn terminata, & parallela diametro LV jungenti contactus contingentium VX, LT quæ ſunt ipſi MN parallelæ, & occurrat ipſa AG diametro MN in D; in hoc puncto bifariam ſecabitur. Fig. 23.

Nam

Nam occurrat ipſa AG contingentibus in Q, R punctis; tum (propter parallelogrammum LVQR) erunt contingentes VQ, LR æquales, ergo æquales ſunt rectæ AQ, RG, (per Prop. 20.) & propter VC, CL æquales & rectam CD ipſis VQ, LR parallelam, erunt QD, DR æquales; ergo æquales ſunt ipſæ AD, DG, ergo AG bifariam ſecatur diametro ſecundâ MN.

Pars 2. Et (iiſdem manentibus) ſi recta AG bifariam ſecetur diametro MN, erit parallela diametro LV, jungenti contactus contingentium VX, LF quæ ipſi MN ſunt parallelæ; nam propter VC, CL æquales, & rectas VQ, CD, LR parallelas, erunt QD, DR æquales, ſed per hypotheſin AD, DG ſunt æquales; ergo æquales ſunt rectæ AQ, RG & ergo æqualia ſunt rectangula AQG, ARG, ſed hæc rectangula ſunt ut quadrata contingentium VQ, LR (per Cor. 2. Prop. 18.) ergo hæc quadrata & proinde ipſæ rectæ VQ, LR æquantur; ergo (33. 1.) rectæ AQRG & LV ſunt parallelæ. Q. E. D.

Corollaria ad duas Propoſitiones præcedentes.

Cor. I. Omnis recta ſectione conicâ terminata, & a diametro bifariam ſecta, eſt parallela contingenti per verticem iſtius diametri ductæ (modo cum ſectio ſit Ellipſis ipſa recta bifariam ſecta, non ſit diameter.) Nam ſi non eſſet parallela huic contingenti, ſit (per Prop. 17.) parallela contingenti ductæ per verticem alterius diametri; tum per Prop. 34. ab hac altera diametro bifariam quoque ſecaretur: quod eſt abſurdum.

Cor. II. Omnes rectæ ordinatim applicatæ eidem diametro ſectionis conicæ ſunt inter ſe parallelæ. Nam cum applicantur diametro Parabolæ, Ellipſeos, aut diametro tranſverſæ Hyperbolæ omnes erunt parallelæ contingenti per verticem iſtius diametri ductæ (per Cor. præc.) & cum applicantur diametro ſecundæ Hyperbolæ

bolæ) erunt uni eidemque diametro tranſverſæ parallelæ, per caſum ſecundum Propoſitionis præcedentis.

Cor. III. Hinc quævis recta ſectione conicâ vel Hyperbolis oppoſitis terminata & parallela ordinatim applicatis cuivis diametro, erit eidem diametro ordinatim applicata.

Cor. IV. Hinc etiam, duæ rectæ ſectione conicâ vel ſectionibus oppoſitis terminatæ ſe mutuo bifariam decuſſare nequeunt, niſi occurrunt in centro Ellipſeos aut ſectionum oppoſitarum. Nam ſi poſſint, tum duci poteſt diameter ſectionis utraſque bifariam ſecans, & proinde eſſent ambæ ordinatim applicatæ eidem diametro & ergo (per Cor. 2.) inter ſe parallelæ, quod eſt abſurdum.

Cor. V. Hinc etiam patet, quod ſi duæ rectæ ſibi invicem parallelæ terminentur ſectione conicâ vel ſectionibus oppoſitis, diameter unam biſecans bifariam ſecabit alteram.

Cor. VI. Recta biſecans duas parallelas ſectione conicâ vel ſectionibus oppoſitis terminatas eſt diameter. Nam diameter unam biſecans bifariam ſecabit alteram.

Cor. VII. Hinc, ſegmento ſectionis conicæ poſitione dato, inveniri poſſunt diametri & centrum ejus: ductis enim duâbus parallelis ſegmento terminatis, recta utraſque biſecans erit diameter; eodem modo, inveniri poteſt alia diameter, quæ ſi ſit priori parallela, ſectio erit Parabola. Si diametri occurrant, occurſus eſt centrum ſectionis, quæ erit Ellipſis, ſi ſegmentum ſit concavum verſus centrum; ſi vero convexum, ſectio erit Hyperbola.

Cor. VIII. Recta per verticem diametri ducta parallela ordinatis ejus, continget ſectionem. Nam ſi non, ducatur per ver-

ticem ejus, recta contingens ſectionem, hæc quoque erit parallela ordinatis iſtius diametri per Cor. 1. *Q. E. A.*

Cor. IX. Hinc patet methodus ducendi rectam quæ ſectionem conicam poſitione datam contingat, & ſit parallela cuivis rectæ ſectionem in duobus punctis ſecanti; nam ducatur recta huic ſecanti parallela & ſectione terminata, recta has parallelas bifariam ſecans erit diameter, & recta per verticem ejus ducta parallela rectis biſectis ſectionem continget per Cor. præced.

PROP. XXVI.

Si duæ rectæ contingentes ſectionem conicam vel ſectiones oppoſitas ſibi invicem occurrant; recta per earum occurſum ducta, & bifariam ſecans rectam jungentem contactus, erit diameter ſectionis.

Fig. 25, 26. CONTINGANT enim rectæ PM, PN, ſectionem conicam vel ſectiones oppoſitas in M, N, jungantur puncta M, N & ducatur PO bifariam ſecans ipſam MN in O; erit PO diameter.

Nam ſi non, per punctum O ducatur diameter ſectionis occurrens contingenti PM in Q, & jungatur NQ ſectioni iterum occurrens in puncto A; per A ducatur recta AD parallela ipſi MN, hæc occurret ſectioni oppoſitæ ut in B (Cor. 4. ad Def.) cum puncta M, N ſunt in oppoſitis ſectionibus; & cum hæc puncta ſunt in eadem ſectione, quoniam A non eſt vertex diametri OQ, recta AD ipſi MN parallela non continget ſectionem (per Cor. 1. præc. & Cor. 2. 17. huj) occurrat igitur ſectioni iterum in B & ipſi OQ in X & PM in D; cum recta AB ſit parallela ipſi MN a diametro OQ biſectæ, ipſa quoque ab eadem diametro bifariam ſecabitur (per Cor. 5. præc.) erit igitur ſegmentum AX æquale ipſi BX; & quoniam in triangulo MQN recta OQ a vertice ducta

biſecat

biſecat baſim in O, eadem biſecabit rectam AD baſi parallelam in X; ergo ſegmentum DX eſt æquale ſegmento AX, hoc eſt, ipſi BX, quod fieri nequit; ergo nulla recta per punctum O ducta præter ipſam PO eſt diameter ſectionis. *Q. E. D.*

Cor. I. Et contra: ſi duæ rectæ ſectionem conicam vel ſectiones oppoſitas contingentes ſibi invicem occurrant; diameter biſecans jungentem contactus tranſibit per occurſum contingentium. Nam unica diameter biſecare poteſt jungentem contactus, & recta biſecans jungentem contactus & tranſiens per occurſum contingentium eſt diameter; ergo conſtat Corollarium.

Cor. II. Hinc patet, quod ſi duæ rectæ contingentes ſectionem conicam, vel ſectiones oppoſitas ſibi invicem occurrant, earum occurſus erit ad diametrum quæ biſariam ſecat jungentem contactus.

Cor. III. Hinc, tres rectæ contingentes ſectionem vel ſectiones oppoſitas, in uno puncto occurrere ſibi invicem nequeunt.

Nam ſi poſſint; ducantur duæ rectæ jungentes unum punctum contactus cum duobus reliquis; tum (per Cor. 1.) duæ diametri has rectas biſecantes occurrerent ſibi invicem in occurſu contingentium, quod fieri nequit. Nam ſi ſectio ſit Parabola, diametri nunquam occurrent, & diametri Ellipſeos aut Hyperbolæ ſolummodo occurrunt in centro, per quod nulla tranſit contingens Cor. 4. 22. hujus.

PROP. XXVII.

Duæ diametri Ellipſeos aut Hyperbolæ, quarum una ſit parallela rectis alteri ordinatim applicatis, ſunt diametri conjugatæ.

Fig. 22. 23

SIT MN quævis diameter Ellipſeos aut diameter ſecunda Hyperbolæ, cui occurrat in puncto D recta AG ei ordinatim applicata, & ſit diameter LV ipſi AG Parallela; erunt hæ duæ diametri MN, LV diametri conjugatæ.

Nam per vertices diametri LV ducantur contingentes VX, LT erunt inter ſe Parallelæ (per Cor. 3. Prop. 22.) & occurrant ipſi AG (ſi opus productæ) in Q, R punctis; tum, propter parallelogrammum, erunt contingentes VQ, LR æquales, ergo (per Prop. 20.) erunt rectæ AQ, RG æquales; ſed æquales ſunt AD, DG (per hypotheſin) ergo æquales ſunt rectæ QD, DR, & rectæ VC, CL ſunt æquales, ergo CD ſive MN parallela eſt ipſis VQ, LT; ſed diameter LV bifariam ſecat (per 24. hujus) omnes rectas quæ, ipſis VQ, LT, hoc eſt, ipſi diametro MN ſunt Parallelæ; ergo diametri MN, LV ſunt diametri conjugatæ per Definitionem 19.

Sit nunc recta AB ordinatim applicata diametro tranſverſæ LV Hyperbolæ, & ducatur diameter ſecunda MN ipſi AB parallela; erunt diametri LV, MN conjugatæ. Nam per vertices diametri LV ducantur rectæ VX, LT, parallelæ ipſi AB, hoc eſt diametro MN, erunt contingentes; (Cor. 8. 25. hujus) ergo per Prop. 25. diameter MN bifariam ſecat omnes rectas Hyperbolis oppoſitis terminatas & diametro LV parallelas: Ergo diametri LV, MN ſunt conjugatæ. *Q. E. D.*

Cor. Patet quod ordinata cujuſvis diametri eſt parallela ejus diametro conjugatæ. Et quod duæ diametri ſunt conjugatæ, ſi una earum ſit parallela contingenti per verticem alterius ductæ.

Et contra: contingens per verticem diametri ducta eſt parallela ejus conjugatæ.

PROP.

PROP. XXVIII. PROB. III.

Datis poſitione ſectione conicâ ejuſque diametro; per datum in ſectione punctum ducere rectam quæ ſit ordinatim iſti diametro applicata.

PRIMO, ſit ſectio Parabola aut Hyperbola ejuſque diameter MN poſitione data (quæ in Hyperbola ſit tranſverſa) datumque in ſectione ſit punctum A, ad diametrum MN ducatur quævis recta AN, & producatur ad H ut æquales ſint AN, NH, per H ducatur recta ipſi MN parallela quæ per Cor. 4. & 5. Def. occurret ſectioni in aliquo puncto G; erit juncta AG ordinatim applicata diametro MN. Fig. 27.

Nam, propter æquales AN, NH & parallelas DN, GH, æquales erunt AD, DG.

Secundo, ſit ſectio Ellipſis aut Hyperbola, & ſit MN quævis diameter Ellipſeos aut diameter ſecunda Hyperbolæ, cui à puncto in ſectione A ducenda eſt ordinatim applicata; inveniatur centrum ſectionis (22. huj.) & per punctum A ducatur diameter ſectionis ACH; ſi recta per verticem ejus H vel A ducta parallela ipſi MN, ſectionem contingat, tum diameter ACH eſt conjugata ipſi MN, & hæ diametri dicuntur ſibi invicem ordinatim applicari. Si vero recta per H ducta & ipſi MN parallela, ſectioni iterum occurrat in puncto aliquo G, juncta AG erit ordinatim applicata diametro MN. Nam ei occurrat in D; propter æquales AC, CH & parallelas HG, CD, æquales erunt AD, DG, eſt igitur recta AG ordinatim applicata diametro MN. *Q. E. F.* Fig. 22, 23.

Cor. Hinc, per punctum datum in ſectione conica poſitione data, duci poteſt recta quæ ipſam contingat: Nempe per Cor. 7. Prop. 25. inveniantur diametri ſectionis, & per punctum datum ducatur diameter, cui (per hanc Prop.) ducatur ordinata; recta huic ordinatæ parallela, ducta per punctum datum, ſectionem continget, per Cor. 8. Prop. 25.

PROP.

PROP. XXIX.

Quadrata rectarum quæ ordinatim applicantur eidem diametro Parabolæ, ſunt inter ſe, ut abſciſſæ iſtius diametri inter ipſas ordinatas, & verticem ejus.

FIG. 28. SIT Parabolæ diameter LV cujus vertex eſt V, occurratque rectis BA, HG ipſi ordinatim applicatis in punctis C, D.

Quoniam hæ rectæ ſunt inter ſe parallelæ (Cor. 2. Prop. 25.) erunt per Cor. Prop. 19. rectangula BCA, HDG, hoc eſt, quadrata ex ordinatis BC, HD inter ſe, ut CL, DL ſciz. abſciſſæ diametri inter ipſas ordinatas & verticem ejus V. Def. 21. *Q. E. D.*

PROP. XXX.

Quadrata rectarum quæ ordinatim applicantur cuivis diametro Ellipſeos vel tranſverſæ diametro Hyperbolæ, ſunt inter ſe, ut rectangula contenta abſciſſis diametri inter vertices ejus, & ipſas ordinatas.

FIG. 22, 23. SIT LV diameter Ellipſeos vel tranſverſa diameter Hyperbolæ cujus vertices ſunt L, V, occurratque in punctis O, S duabus rectis BA, HG ipſi ordinatim applicatis, & Ellipſi, Hyperbolâ, vel diverſis Hyperbolis terminatis.

Quoniam hæ rectæ ſunt inter ſe parallelæ (Cor. 2. Prop. 25.) erunt per (Cor. 1. Prop. 18.) rectangula BOA, HSG, hoc eſt quadrata ex ordinatis BO, HS inter ſe ut rectangula LOV, LSV contenta ſciz. obſciſſis diametri LV inter ipſas ordinatas & vertices ejus. *Q. E. D.*

COR. I. Cum per hanc propoſitionem manifeſtum eſt, quod in Ellipſi, vel Hyperbolis oppoſitis, ordinatæ eidem diametro applicatæ, quæ æqualiter a centro diſtant, ſunt æquales inter ſe; patet etiam ſi ſectiones oppoſitæ ſibi invicem ita apponantur, ut recta VO cum ipſa LS, & angulus VOC cum angulo ſuo alterno LSG coincidat,

coincidat, quod totæ ſectiones penitus congruent: & ſimiliter duo ſegmenta Ellipſeos in quæ ab ejus diametro dividitur, ita ſibi invicem apponi poſſunt, ut in toto congruant.

Cor. II. Hinc, ſi ſuper diametrum Ellipſeos deſcribatur Circulus, & a duobus punctis hujuſce diametri ducantur ad Ellipſim rectæ huic diametro ordinatim applicatæ, & rectæ ad Circulum eidem diametro perpendiculares; erunt ipſæ ordinatæ inter ſe, ut perpendiculares. Nam per hanc Prop. quadrata ex ordinatis ſunt inter ſe ut rectangula contenta abſciſſis diametri inter ipſas & vertices ejus, hoc eſt, (propter Circulum) ut quadrata ex perpendicularibus, ergo ipſæ ordinatæ ſunt inter ſe ut perpendiculares.

PROP. XXXI.

Si duæ rectæ ſibi invicem occurrentes contingant vel ſecent, vel earum una contingat & altera ſecet Ellipſim; quadrata ex contingentium ſegmentis, vel rectangula contenta ſegmentis ſecantium, inter rectarum occurſum, & Ellipſim, erunt ad ſe invicem ut quadrata ſemidiametrorum quibus ipſæ rectæ ſunt parallelæ.

NAM diametri Ellipſeos ſunt ſecantes quæ ſibi invicem occurrunt in centro, & rectangula contenta earum ſegmentis inter centrum & Ellipſim, ſunt quadrata ſemidiametrorum. Ergo (per 18. huj.) quadrata contingentium, vel rectangula contenta ſegmentis ſecantium, ſunt inter ſe, ut quadrata ſemidiametrorum quibus ſunt parallelæ.

Cor. I. Hinc, ſi in Ellipſi, recta AD ordinatim applicetur diametro MN; erit rectangulum MDN contentum abſciſſis diametri MN, ad quadratum ex ordinata AD, ut quadratum ex diametro MN, ad quadratum ex ipſius conjugata LV. Nam occurrat recta AD producta Ellipſi in G, erit quadratum ex AD æquale Fig. 22.

æquale rectangulo ADG, & per Cor. 27. huj. diameter LV & recta AG ſunt parallelæ; ergo conſtat Corollarium ex hac Propopoſitione.

Cor. II. Si duæ diametri conjugatæ Ellipſeos MN & LV ſint ſibi invicem perpendiculares, erunt inæquales; nam ſi eſſent æquales, a quovis puncto Ellipſeos A ducatur recta AD ad diametrum MN ei ordinatim applicata, erit ipſi LV parallela (Cor. 27. huj.) & proinde angulus MDA eſt rectus (per Hyp.) ſit C centrum & jungatur CA; erit (per 47. 1.) quadratum ex CA æquale quadratis ex CD, DA, hoc eſt quadrato ex CD una cum rectangulo MDN (nam rectangulum MDN & quadratum ex DA æquantur per Cor. præc. quia æquales ſunt diametri MN, LV per Hyp.) ſive (5. 2.) quadrato ex ſemidiametro CN; ergo ſemidiametri CA, CN ſunt æquales: & ſimiliter eſſent omnes ſemidiametri Ellipſeos inter ſe æquales & proinde Ellipſis eſſet Circulus, quod eſt abſurdum, ergo conſtat Corollarium.

Cor. III. Hinc patet, quod ſi duæ rectæ contingentes Ellipſim ſibi invicem occurrant; ſegmenta contingentium inter occurſum & contactus, erunt ad ſe invicem ut ipſæ ſemidiametri, quibus ſunt parallelæ.

DEFINITIO XXIV.

Fig. 23. SI in Hyperbolæ diametro ſecunda, ſumatur ſegmentum MN in centro biſectum, & ſit quadratum ex ſegmento MN ad quadratum ex diametro LV huic diametro ſecundæ conjugatâ, ut quadrata ex ordinatim applicatis diametro LV ſunt ad rectangula contenta ejus abſciſſis, puncta M, N, termini hujus ſegmenti, dicuntur *Vertices* iſtius diametri ſecundæ; & magnitudo cujuſvis diametri ſecundæ per hujuſmodi puncta determinatur, ut magnitudo diametri tranſverſæ per vertices ejus determinatur.

PROP.

PROP. XXXII.

Si a puncto Hyperbolæ ducatur recta ordinatim applicata diametro ſecundæ; ut quadratum ex ea diametro ſecunda, eſt ad quadratum ex diametro tranſverſa ei conjugata, ita erit ſumma quadratorum ex ſemidiametro ſecunda & ſegmento ejus inter centrum & ordinatam, ad quadratum ex ordinata.

A Puncto Hyperbolæ A ducatur AD ordinatim applicata diametro ſecundæ MN, & ſit diameter LV ipſi MN conjugata; erit quadratum ex CN, ad quadratum ex CV, ut quadrata ex CN, CD ſimul, ad quadratum ex AD. Fig. 23.

Nam ducatur AO ordinatim applicata ipſi diametro LV, erit COAD parallelogrammum, (per Cor. Prop. 27.) & proinde æquales ſunt AD, OC ut & AO, DC.

Per Definitionem præcedentem, eſt quadratum ex CN ad quadratum ex CV, ut quadratum ex (AO ſive) CD ad rectangulum VOL; ergo (per 12. 5.) erit ut quadratum ex CN ad quadratum ex CV, ita ſumma quadratorum ex CN, CD, ad quadratum ex CV & rectangulum VOL ſimul, hoc eſt (per 6. 2.) quadratum ex CO, ſive AD. *Q. E. D.*

Cor. Hinc, ſi a duobus punctis in Hyperbola vel oppoſitis Hyperbolis ducantur duæ rectæ diametro ſecundæ ordinatim applicatæ; erit quadratum ex primo ducta, ad quadratum ex altera, ut ſumma quadratorum ex ſemidiametro ſecunda & diſtantia primo ductæ a centro, ad ſummam quadratorum ex eadem ſemidiametro ſecunda & diſtantia alterius à centro.

PROP. XXXIII.

FIG. 29. Datâ poſitione quâvis rectâ indefinitâ VL, & puncto V in ea dato, & datâ rectâ MN ab ipſa VL bifariam ſectâ in P; deſcribi poteſt Parabola, cujus diameter ſit recta VL, verticem habens punctum V, & cui recta MN ſit ordinatim applicata.

NAM per rectam MN tranſeat planum quodvis a plano MPV diverſum, & in hoc plano deſcribatur Circulus circa diametrum MN, & ducatur diameter ejus BPD, ipſi MN perpendicularis, occurrens circulo in punctis B, D; jungatur BV, & per punctum D in plano VBD ducatur recta DA ipſi VL parallela, quæ rectæ BV alicubi occurrat ut in puncto A; quo puncto immoto manente, agatur recta AD circa peripheriam circuli BNDM; interſectio ſuperficiei conicæ, motu ejus genitæ, cum plano MPV, erit Parabola.

Nam per D ducatur DE parallela ipſi MN, erit perpendicularis diametro BD (per conſtructionem) & ergo Circulum continget in D, & proinde planum ADE ſuperficiem continget (8. huj.) & erit parallelum plano ſectionis MVN (per 15. 11.) Hæc ſectio eſt ergo Parabola, & recta VL parallela ipſi AD eſt diameter ejus, habens verticem punctum V, & recta MN eſt huic diametro ordinatim applicata; quæ omnia patent ex Definitionibus 11. 15. *Q.E.D.*

COR. Si duæ rectæ NP, YZ inter ſe parallelæ, occurrant cuivis rectæ VL, & in ea ſumatur Punctum V, (non inter P & Z,) ita ut quadratum ex NP ſit ad quadratum ex YZ, ut PV, ad ZV; erunt puncta N, Y, in Parabola habente rectam LV diametrum, cujus vertex eſt punctum V, & cui ordinatim applicantur rectæ NP, YZ, Nam ſi (per hanc Prop.) deſcribatur Parabola circa diametrum VL cujus vertex ſit V, & in qua recta NPM ſit iſti diametro ordinatim applicata, quoniam recta YZ ſecat diametrum infra verticem, producta utrinque occurret Parabolæ in duobus punctis

(15.

UNIV. OF MICH.

(15. huj.) & erit eidem diametro LV ordinatim applicata, (Cor. 3. Prop. 25.) & proinde punctum Y erit in hac Parabola; nam ſi Parabola occurrat rectæ ZY productæ, vel inter puncta Z & Y, per Prop. 29. quadratum ex NP eſſet ad quadratum ex recta majori, vel minori ipſâ YZ, ut PV ad ZV, contra Hypotheſin.

LEMMA I.

SI in duobus planis ſe invicem interſecantibus, duæ rectæ ſint inter ſe parallelæ; erunt parallelæ communi interſectioni planorum.

Nam ſi non, interſectioni planorum alicubi occurrent, ac proinde interſectio planorum eſſet in eodem plano cum duabus parallelis (per 7. 11.) contra Hypotheſin.

PROP. XXXIV.

Datis duabus rectis ſe invicem bifariam ſecantibus; deſcribi poteſt Ellipſis in qua datæ rectæ ſint diametri conjugatæ; modo rectæ non ſint æquales, ſi ſibi invicem perpendiculariter ſecent.

SINT rectæ datæ VL, MN, & punctum interſectionis C, per rectam MN, tranſeat planum quodvis à plano MCV diverſum, & in hoc plano per punctum C ducatur recta BD perpendicularis ipſi MN, in hac recta, ſumpto præter C quovis puncto P pro centro, deſcribatur Circulus tranſiens per puncta M, N, qui rectæ BD alicubi occurrat ut in punctis B, D. Concurrant rectæ jungentes puncta B, V & L, D ſibi invicem in A (nam ſunt in eodem plano cum rectis BD, VL (2. 11.) & non erunt parallelæ, nam ſi ſint parallelæ triangula VCB, LCD eſſent ſimilia & ergo propter CV, CL æquales, eſſent BC, CD æquales contra Hypoth.) puncto A immoto manente, agatur recta AD circa peripheriam circuli BNDM: interſectio ſuperficiei conicæ ita genitæ cum plano FIG. 30.

 MVNL,

MVNL, erit Ellipſis, in qua rectæ VL, MN ſunt diametri conjugatæ.

Per terminum D diametri BD ducatur DE contingens Circulum, erit parallela ipſi MN (per Conſtruc. & 16. 3.) & planum ADE continget ſuperficiem in recta ADL, & recta LT, interſectio hujuſce plani contingentis cum plano ſectionis VNLM, continget ſectionem in L; & cum rectæ MN, DE in his planis interſecantibus ſint inter ſe parallelæ, erunt (per Lem. 1.) parallelæ ipſi LT; cum vero rectæ VL, MN ſectione MVNL terminatæ, ſe invicem biſariam ſecat in C, erunt diametri hujuſce ſectionis, ſive ſit Ellipſis (Cor. 4. 25. huj.) ſive Circulus. Si diametri VL, MN, non ſint ſibi invicem perpendiculares, contingens LT ipſi MN parallela, non erit perpendicularis diametro LV per contactum ductæ, ergo ſectio MVNL non erit Circulus (16. 3.) & ſi diametri VL, MN ſint ſibi invicem perpendiculares ſunt per Hypoth. inæquales, ergo nec in hoc caſu ſectio MVNL erit Circulus; ideoque ſectio MVNL conum ambiens eſt Ellipſis (per Cor. 7. ad Def.) & diametri ejus VL, MN ſunt conjugatæ (Cor. 27. huj.) quia MN parallela eſt contingenti LT ductæ per verticem ipſius VL. *Q. E. D.*

Cor. Biſariam ſecent ſe invicem datæ rectæ VL, MN in C, ut in Propoſitione: Si a quovis puncto Y, ducatur YZ ad rectam VL, & parallela ipſi MN, & ſi rectangulum LZV ſit ad quadratum ex YZ, ut quadratum ex LC ad quadratum ex MC; erit punctum Y in Ellipſi circa diametros conjugatas VL, MN deſcripta. Nam aliter rectangulum LZV eſſet ad quadratum rectæ majoris vel minoris ipſâ YZ, ut quadratum ex LC ad quadratum ex MC (per Cor. 1. Prop. 31.) contra Hypotheſin.

PROP.

PROP. XXXV.

Datis duabus rectis ſe invicem bifariam ſecantibus, deſcribi poſſunt Hyperbolæ oppoſitæ, quarum una e rectis datis ſit diameter tranſverſa, & altera diameter ſecunda ei conjugata.

SINT rectæ datæ VL, MN, & earum interſectio C; ſumatur in LV producta, punctum quodvis O per quod ducatur RQ ipſi MN parallela, & ſumantur utrinque RO, OQ æquales & ita ut quadratum ex RO vel OQ ſit ad rectangulum VOL, ut quadratum ex MN ad quadratum ex LV; per rectam RQ tranſeat planum quodvis a plano ROV diverſum, & in hoc plano ducatur per O recta BD ipſi RQ perpendicularis, in hac recta ſumpto quovis puncto P pro centro, deſcribatur Circulus tranſiens per puncta R, Q, qui rectæ BD alicubi occurrat ut in punctis, B, D, jungantur BV & DL, & concurrent hæ rectæ BV, LD, alicubi ut in A puncto (nam ſunt in eodem plano cum rectis BD, VL, & non ſunt parallelæ) & circa peripheriam circuli BQDR agatur recta per punctum A utrinque producta; interſectiones ſuperficierum oppoſitarum quæ motu hujus rectæ ſunt genitæ, cum plano MVNL, erunt Hyperbolæ oppoſitæ per Definitionem 13. FIG. 31.

Per puncta B, D ducantur BK, DE circulum contingentes, erunt parallelæ ipſi RQ quæ eſt diametro BD perpendicularis; tum recta VX interſectio plani contingentis ABK cum plano Hyperbolarum continget Hyperbolam, RVQ in V, & (per Lem. 1.) erit parallela ipſis OR, BK, & recta LT interſectio plani contingentis ADE cum plano Hyperbolarum, continget Hyperbolam oppoſitam in L, & erit parallela ipſis OR, DE. (per Lem. 1.) Ergo contingentes VX, LT ſunt ſibi invicem & rectæ MN parallelæ, & ergo recta VL eſt diameter tranſverſa Hyperbolarum

(per

(per Cor. 2. Prop. 22.) & recta MN eſt diameter ſecunda ipſi VL conjugata (per Cor. Prop. 27.) & puncta M, N, ſunt vertices ejus per Conſtructionem & Definitionem 24. Et eodem modo deſcribi poſſunt duæ aliæ Hyperbolæ oppoſitæ quarum recta MN ſit diameter tranſverſa, & VL diameter ſecunda ei conjugata. *Q. E. D.*

Cor. Bifariam ſecent ſe invicem datæ rectæ VL, MN, & ad rectam VL productam ducatur RO ipſi MN parallela, & ſit, ut quadratum ex MN ad quadratum ex VL, ita quadratum ex RO ad rectangulum VOL; erit punctum R in Hyperbola cujus diameter tranſverſa eſt recta VL, cui ipſa RO eſt ordinatim applicata, & cui ipſa MN eſt diameter conjugata; ut patet.

DEFINITIO XXV.

Fig. 32. SIT BAF, conus & ſint lineæ *aVb*, *mLn* Hyperbolæ oppoſitæ, quarum planum verticale ſit ADE occurrens ſuperficiebus oppoſitis in rectis DA*d*, EA*e*, ducantur plana ADGC, AEHC contingentia ſuperficies conicas in rectis DA*d*, EA*e*, & ſint rectæ GC*g*, HC*b* interſectiones horum planorum cum plano Hyperbolarum; hæ rectæ dicuntur Hyperbolarum *Aſymptoti.*

Cor. I. Aſymptoti Hyperbolarum GC*g*, HC*b* ſunt parallelæ lateribus coni AD, AE in quibus planum verticale ſuperficiei occurrit; nam planum verticale eſt parallelum plano Hyperbolarum, ergo conſtat Cor. per hanc Definitionem & 16. 11.

Cor. II. Aſymptoti GC*g*, HC*b* cum ipſis Hyperbolis non conveniunt; nam aſypmtoti ſunt in planis ſuperficies conicas contingentibus & (per Cor. præc.) ſunt parallelæ rectis DA*d*, EA*e* in quibus ſolis hæc plana occurrunt ſuperficiebus: ergo aſymptoti non conveniunt cum ſuperficiebus conicis, ac proinde non cum ipſis Hyperbolis in iſtis ſuperficiebus poſitis.

Cor.

Cor. III. Omnis recta ut NV ducta in plano Hyperbolarum & HC*b* alterutri aſymptotorum parallela, occurret uni Hyperbolarum in unico puncto, & erit ex una parte, tota intra hanc Hyperbolam, & ex altera parte, tota extra utraſque.

Nam (per Cor. I.) recta NV eſt parallela lateri coni AE, ergo (per Prop. 5.) occurret uni ſuperficierum oppoſitarum in unico puncto, & erit ex una parte, tota intra hanc ſuperficiem, & ex altera parte, tota extra utraſque ſuperficies: ergo quoniam recta NV ſit in plano Hyperbolarum, Corollarium conſtat per Cor. 1. ad Definitiones Sectionum.

Cor. IV. Si utramque rectarum continentium angulum GC*b*, qui deinceps eſt angulo GCH Hyperbolam continenti, ſecet recta PQ; cum utraque Hyperbola conveniet. Nam ſi a puncto C occurſu aſymptotorum ducatur recta CV ipſi PQ parallela, cadet intra angulum GCH, & ergo, quia æquales ſunt anguli GCH, DAE (10. 11.) ſi a vertice coni A ducatur recta parallela ipſi CV ſive PQ cadet hæc intra angulum DAE & proinde intra ſuperficies conicas; ergo recta PQ occurret ſuperficiebus oppoſitis (per Cor. 2. Prop. 6.) & proinde cum utraque Hyperbola conveniet, quia eſt in eodem plano cum iis.

Cor. V. Si recta contingat Hyperbolam in quovis puncto V, conveniet cum utriſque aſymptotis, HC, GC quæ iſtam Hyperbolam continent; nam ſi fuerit alterutri aſymptotorum parallela, eſſet ex una parte puncti V, intra Hyperbolam (per Cor. 3.) contra Hypotheſin; vel ſi occurreret lateribus anguli, qui deinceps eſt angulo HCG, conveniret cum utraque Hyperbola (per Cor. 4.) & proinde non eſſet contingens (per Cor. 2. ad Def. Sect.) ergo occurret lateribus anguli HCG Hyperbolam continentis.

Cor. VI. Patet rectam RS ſecantem Hyperbolam vel oppoſitas Hyperbolas convenire cum aſymptotis.

PROP.

PROP. XXXVI.

Si recta ſecans Hyperbolam vel oppoſitas Hyperbolas conveniat in duobus punctis cum aſymptotis; ſegmenta ejus inter Hyperbolam vel Hyperbolas, & aſymptotos, erunt æqualia. Vel ſi recta contingat Hyperbolam; ſegmenta ejus inter contactum & aſymptotos erunt æqualia. Vel ſi recta conveniat cum aſymptotis, & ſegmenta ejus inter aſymptotos, & punctum in Hyperbola ſint æqualia; in iſto puncto Hyperbolam continget.

FIG. 32. *Pars* 1. SECET recta RS Hyperbolam vel Hyperbolas in punctis R, S, & occurrat aſymptotis in P, Q, erunt ſegmenta PR, QS inter ſe æqualia. Nam ſit AC communis interſectio planorum contingentium ADGC, AEHC & in his planis ducantur per puncta P, Q, rectæ PK, QI ipſi AC parallelæ, occurrentes lateribus coni *d*AD, *e*AE in K, I punctis; patet haſce rectas contingere eandem, vel oppoſitas ſuperficies conicas, in punctis K, I, & (propter parallelogramma) erunt ipſi AC, & proinde ſibi invicem æquales; ergo cum recta jungens puncta P, Q, ſecat eandem, vel oppoſitas ſuperficies conicas in R, S, erunt ſegmenta RP, SQ inter ſe æqualia per Prop. 13.

Pars 2. Contingat Hyperbolam quævis recta ut TX in V, & occurrat ejus aſymptotis in X, & T punctis; erunt ſegmenta VX, VT æqualia. Nam a punctis X, T, ducantur in planis contingentibus duæ rectæ XY, TZ ipſi AC parallelæ, occurrentes lateribus coni *d*AD, *e*AE in punctis Y & Z, patet haſce rectas in iſtis punctis contingere ſuperficiem conicam BAF & eſſe (propter parallelogramma) ipſi AC, & proinde ſibi invicem, æquales; Ergo cum recta jungens puncta X, T contingat ſuperficiem conicam in V, erunt ſegmenta VX, VT æqualia per Prop. 13.

Pars

Pars 3. Vel ſi recta XT occurrens aſymptotis in X, T, conveniat cum Hyperbola in V, & ſint ſegmenta VX, VT æqualia; recta continget Hyperbolam in puncto V.

Nam ſi ei occurreret in alio puncto puta *p*, ſegmentum T *p*, æquale eſſet ſegmento VX, (per partem prim.) hoc eſt ipſi VT, quod eſt abſurdum: Ergo non occurrit Hyperbolæ niſi in V, ergo ipſam contingit; nam non cadet ex una parte tota intra Hyperbolam, quia ponitur occurrere utriſque ejus aſymptotis. *Q. E. D.*

Cor. I. Aſymptoti concurrunt in centro Hyperbolarum; nam ducantur duæ rectæ QP, HG inter ſe parallelæ, ſecantes Hyperbolam in punctis S, R & *a*, *t* & occurrentes aſymptotis in punctis Q, P & H, G, & per occurſum aſymptotorum C ducatur CV bifariam ſecans rectam QP in O, hæc quoque bifariam ſecabit rectam HG, (per 2 Cor. 4. 6.) in puncto *q*; ſed cum ſegmenta RP, SQ, ut etiam *t*G, *a*H æqualia ſunt, recta CV bifariam ſecabit ipſas SR, *a t* Hyperbolâ terminatas: ergo hæc recta eſt diameter tranſverſa Hyperbolæ; eodem modo oſtendi poteſt, aliam rectam per occurſum aſymptotorum ductam eſſe diametrum tranſverſam. Ergo aſymptoti concurrunt in centro Hyperbolarum.

Cor. II. Omnis recta LCV ducta per centrum, & intra angulum HCG Hyperbolam continentem eſt diameter tranſverſa; nam quævis recta ducta ipſi LCV parallela & in plano Hyperbolarum neceſſario occurret lateribus anguli, qui deinceps eſt angulo HCG, & ergo occurret oppoſitis Hyperbolis (Cor. 4. ad Def. 25.) ergo ipſa LCV huic rectæ parallela occurret (Cor. 3. ad Def. Sect.) oppoſitis Hyperbolis; ſed tranſit per centrum, ergo eſt diameter tranſverſa per Def. 19.

Cor. III. Omnis recta MN ducta per centrum, & intra angulum qui deinceps eſt angulo HCG Hyperbolam continenti, eſt diameter ſecunda. Nam per punctum quodvis O intra Hyperbolam, ducatur recta ipſi MN parallela; patet eam occurrere lateribus

anguli HCG, & proinde ipſi Hyperbolæ, in duobus punctis; ergo recta MN eſt diameter ſecunda per Prop. 23.

Cor. IV. Hinc datis poſitione aſymptotis, patet methodus ducendi rectam, quæ Hyperbolam in dato puncto contingat. Sint enim aſymptoti HC, GC poſitione datæ, & ſit V punctum in Hyperbola datum; per V ducatur recta V*r* uni aſymptoto HC parallela, & alteri CG occurrens in *r*, & in aſymptoto CG ſumatur *r*X æqualis ipſi C*r*, & jungatur VX, erit hæc recta contingens; nam producta occurrat HC in T; tum propter CT, *r*V parallelas & C*r*, *r*X æquales; erunt ipſæ TV, VX æquales; ergo recta TX contingit Hyperbolam in V per Caſ. 3. Propoſitionis.

Cor. V. Hinc, datis poſitione Hyperbolis & earum aſymptotis, patet methodus ducendi rectam a puncto dato X, in aſymptoto CG, quæ Hyperbolam adjacentem contingat. Nam bifariam ſecetur CX in *r*, & per *r* ducatur recta alteri aſymptoto CH parallela, Hyperbolæ adjacenti occurrens in V, & erit juncta XV contingens; producta enim occurrat aſymptoto CH in T, & propter æquales X*r*, *r*C (2. 6.) erunt XV, VT æquales; ergo recta XVT eſt contingens.

PROP. XXXVII.

Si recta ſecans Hyperbolam occurrat aſymptoto; erit rectangulum contentum ſegmentis ſecantis, inter aſymptoton & Hyperbolam, æquale quadrato quod ſit ex ſegmento contingentis huic ſecanti parallelæ interjecto inter contactum ejus, & aſymptoton.

Fig. 32. SECET recta Hyperbolam in punctis S, R, & occurrat aſymptoto CG in P, & contingat Hyperbolam in V recta XT ipſi SR parallela, occurrens aſymptoto CG in X, erit rectangulum RPS æquale quadrato ex VX.

Ducantur

Ducantur enim per puncta P, X duæ rectæ in plano contingente ADGC inter ſe parallelæ, & occurrentes lateri coni *d*AD in punctis K, Y, contingent ſuperficiem conicam in iſtis punctis, & erunt inter ſe æquales, propter parallelas XP, YK (Cor. 1. Def 24.) quoniam igitur recta PRS ſecat & recta PK contingit ſuperficiem conicam & hæ rectæ ſunt parallelæ duabus rectis XV, XY contingentibus eandem ſuperficiem; erit (per Prop. 11.) rectangulum RPS ad quadratum ex PK, ut quadratum ex VX ad quadratum ex XY: ſed quadrata ex PK, XY ſunt æqualia, ergo rectangulum RPS æquale eſt quadrato ex VX (14. 5.) *Q. E. D.*

Cor. Hinc ſi per punctum R in Hyperbola, ducatur recta occurrens ejus aſymptotis in P, Q punctis, & eidem Hyperbolæ iterum in S; erit rectangulum PRQ æquale quadrato ex ſegmento contingentis VX, ipſi PQ parallelæ, interjecto inter contactum & aſymptoton. Nam propter æquales RP, SQ, æquales ſunt PS, RQ ergo erit rectangulum PRQ æquale rectangulo RPS, hoc eſt quadrato ex VX per hanc Prop.

PROP. XXXVIII.

Quævis recta aſymptotis intercepta & Hyperbolam contingens; æqualis eſt diametro ſecundæ quæ eſt ipſi parallela.

CONTINGAT recta Hyperbolam in puncto V, & occurrat ejus aſymptotis in T, X punctis; erit recta TX æqualis diametro ſecundæ MN ipſi TX parallelæ. Fig. 32.

Ducatur enim per contactum diameter tranſverſa LVO, & per punctum in ea O, ducatur recta SR ei ordinatim applicata, erit hæc parallela contingenti VX; producatur ipſa SR utrinque ut occurrat aſymptotis in punctis Q, P; æquales erunt OQ OP; & quoniam per Cor. præc. rectangulum PRQ æquale eſt qua-

 drato

drato ex VX, differentia quadratorum ex OP & VX erit quadratum ex OR (per 5. 2.) & differentia quadratorum ex CO, CV eſt rectangulum VOL (per 6. 2.) Tum propter ſimilia triangula CVX, COP, erit quadratum ex OP ad quadratum ex VX, ut quadratum ex CO ad quadratum ex CV, ergo (dividendo) erit quadratum ex OR ad quadratum ex VX, ut rectangulum VOL ad quadratum CV, ergo (alternando) quadratum ex OR eſt ad rectangulum VOL, ut quadratum ex VX ad quadratum ex CV, hoc eſt; ut quadratum ex TX ad quadratum ex LV: ergo TX eſt æqualis diametro ſecundæ ipſi LV conjugatæ (per Definitionem 24.) & proinde ipſi TX parallelæ.

Cor. I. Recta VN jungens vertices duarum diametrorum conjugatarum LV, MN, eſt uni aſymptoto parallela, & ab altera bifariam ſecta. Occurrat enim aſymptotos CG ipſi VN in *r*, & ſit altera aſymptotos CH; per verticem V diametri VL ducatur recta Hyperbolam contingens, & occurrens aſymptotis in punctis T, X; erit (Cor. 27. huj.) VT parallela ipſi CN, et erit eidem æqualis (per hanc Prop.) ergo (33. 1.) rectæ VN, TC ſunt parallelæ et æquales. Quoniam vero XV eſt dimidium ipſius XT, erit V*r* (2. 6.) dimidium ipſius TC ſive VN, ergo VN bifariam ſecatur in puncto *r*; et proinde conſtat corollarium.

Cor. II. Hinc, Hyperbolâ poſitione datâ, facile inveniuntur ejus aſymptoti; inveniantur enim (per Cor. 7. Prop. 25.) diameter quævis tranſverſa LV et centrum C; et (per Prop. 28.) ducatur RO ordinatim applicata diametro LV et (per Def. 24.) inveniatur diameter ſecunda MN ipſi LV conjugata, jungantur V, N vertices diametrorum conjugatarum et a centro ducatur recta CG bifariam ſecans ipſam VN, et recta CH ipſi VN parallela, erunt rectæ CG, CH aſymptoti: ut patet.

PROP.

PROP. XXXIX.

Si per punctum in aſymptoto ducatur recta ſecans Hyperbolam, vel utraſque Hyperbolas; rectangulum contentum ſegmentis ſecantis inter aſymptoton & Hyperbolam, vel Hyperbolas, erit æquale quadrato, quod fit ex ſemidiametro quæ iſti ſecanti eſt parallela.

PRIMO: a puncto P in aſymptoto CG, ducatur recta ſecans Hyperbolam in punctis R, S, & ſit CN ſemidiameter ſecunda ipſi PRS parallela; erit rectangulum RPS æquale quadrato ex contingentis ſegmento VX (per 37. huj.) hoc eſt, quadrato ex ipſa CN per præcedentem. FIG. 32.

Secundo: per idem punctum P ducatur recta ſecans oppoſitas Hyperbolas in R, S punctis, ſit LCV diameter tranſverſa ipſi RPS parallela, & ducatur in plano contingente ADG recta PK parallela ipſi CA interſectioni planorum contingentium ADG, AEH & occurrens lateri coni AD in K; patet hanc PK contingere ſuperficiem coni BAF in K, & eſſe ipſi CA æqualem; quoniam ergo recta PK contingit ſuperficiem conicam & recta PRS ſecat utraſque ſuperficies & hæ rectæ ſunt parallelæ duabus rectis CA, LV occurrentibus in C, quarum una CA per verticem coni tranſit & proinde ſuperficiem contingit in A, & altera ſecat utraſque ſuperficies; erit (per 11. huj.) rectangulum RPS ad quadratum ex PK, ut rectangulum VCL ad quadratum ex CA: ſed æquantur quadrata ex PK, & CA; ergo rectangulum RPS æquale eſt (14. 5.) rectangulo VCL, hoc eſt, quadrato ex CV vel CL ſemidiametro tranſverſæ ipſi RPS parallelæ.

Q. E. D.

COR. I. Vel ſi per punctum R in Hyperbola, ducatur recta aſymptotis occurrens in duobus punctis P, Q; erit rectangulum PRQ contentum ſegmentis inter Hyperbolam & aſymptotos,

æquale

æquale quadrato ex ſemidiametro quæ eſt ipſi PQ parallela: ſit enim recta PQ parallela ſemidiametro ſecundæ CN; & erit rectangulum PRQ æquale rectangulo RPS (per Cor. 37. huj.) hoc eſt, quadrato ex CN, per caſum primum hujus Propoſitionis. Sit nunc recta PQ parallela ſemidiametro tranſverſæ CV, & producta occurrat Hyperbolæ oppoſitæ in S; tum, propter æqualia ſegmenta PR, QS, rectangulum PRQ eſt æquale rectangulo RPS, hoc eſt, quadrato ex CV, per Caſum ſecundum hujus Propoſitionis.

Cor. II. Hinc, ſi recta RS Hyperbolis oppoſitis terminata, ſecetur in punctis P & Q, ita ut utrumque rectangulum RPS, RQS ſit æquale quadrato ex ſemidiametro CV quæ eſt ipſi RS parallela, erunt puncta P, Q, ad aſymptotos, ut patet.

Cor. III. Hinc etiam, diameter tranſverſa minor eſt quâvis rectâ ei parallelâ & Hyperbolis oppoſitis terminatâ.

Cor. IV. Quoniam quævis recta contingens Hyperbolam SVR occurrit utriſque aſymptotis ejus CG, CH, duæ quævis rectæ contingentes eandem Hyperbolam occurrent ſibi invicem intra angulum GCH; & ſi duæ rectæ non inter ſe parallelæ contingant oppoſitas Hyperbolas, neceſſario occurrent intra angulum qui deinceps eſt angulo GCH. Nam duæ contingentes ad aſymptoton convenire nequeunt; ſi enim poſſint, diameter (recta ſciz. ducta per occurſum contingentium & bifariam ſecans jungentem contactus 26. huj.) occurreret aſymptoto in alio puncto præter centrum. *Q. E. A.*

PROP.

PROP. XL.

Si duæ rectæ ſibi invicem occurrant, prout ambæ contingant aut ſecent, vel earum una contingat & altera ſecet Hyperbolam vel Hyperbolas oppoſitas; quadrata ex contingentium ſegmentis, vel rectangula contenta ſecantium ſegmentis, inter rectarum occurſum & Hyperbolam vel Hyperbolas erunt ad ſe invicem ut quadrata ſemidiametrorum quibus ipſæ rectæ ſunt parallelæ.

NAM ſi occurrant ſibi invicem in puncto Q ad aſymptoton CY, rectæ RS, VT utrunque convenientes cum Hyperbola vel Hyperbolis in punctis R, S & V, T, & ſint parallelæ duabus ſemidiametris CA, CB; per Prop. 38, 39. rectangulum RQS erit æquale quadrato ex ſemidiametro CA, & rectangulum VQT, vel quadratum ex contingente QVT erit æquale quadrato ex ſemidiametro CB: ergo rectangulum RQS eſt ad rectangulum VQT vel ad quadratum ex contingente QVT, ut quadratum ex CA ad quadratum ex CB. Si nunc duæ rectæ ipſis RS, VT parallelæ, occurrant ſibi invicem in puncto quod non eſt in aſymptoto; harum quadrata, vel rectangula contenta earum ſegmentis, erunt inter ſe ut quadrata, vel rectangula ex ſegmentis ipſarum RS, VT (per 18. huj.) ideoque ſunt ut quadrata ex ſemidiametris CA, CB quibus ipſæ rectæ ſunt parallelæ. Fig. 33.

Cor. I. Hinc ſi a quovis puncto P ducantur duæ rectæ PO, PX, contingentes eandem Hyperbolam vel Hyperbolas oppoſitas; erunt rectæ PO, PX, inter ſe ut ſemidiametri quibus ſunt parallelæ. Nam eorum quadrata ſunt ut quadrata ſemidiametrorum. Fig. 34.

Cor. II. Si duæ rectæ MN, TR, Hyperbolam vel Hyperbolas oppoſitas contingentes in O, X punctis, occurrant aſymptotis in M, N & T, R; rectæ MR, TN quæ inter occurſus ducuntur,

erunt

erunt ſibi mutuo, & rectæ OX jungenti contactus parallelæ. Nam (per Prop. 38, & Cor. præc.) erit PO ad PX ut OM, ad XR; ergo recta XO eſt ipſi MR parallela (per 2. 6.) et ſimiliter quoniam PO eſt ad PX, ut NO ad TX, erit (alternando) PO ad NO, ut PX ad TX, & erit (convertendo) PO ad PN, ut PX ad PT; ergo triangula OPX, NPT, habentia latera circa æquales angulos proportionalia, ſunt æquiangula; (6. 6.) ergo angulus TNP eſt æqualis angulo alterno XOP, & proinde recta XO eſt ipſi TN parallela.

Cor. III. Hinc, ſtantibus jam poſitis, ſegmentum NR aſymptoti CZ interceptum duabus rectis contingentibus Hyperbolam vel Hyperbolas oppoſitas, biſariam ſecatur rectâ OX (ſi opus productâ) jungente contactus; nam OX eſt parallela ipſi MR (per Cor. præc.) occurrat igitur (ſi opus producta) aſymptoto CZ in B, & propter MO, ON æquales (36. huj.) erunt rectæ RB, BN æquales.

PROP. XLI.

Fig 35. Si recta ſecans Hyperbolam vel Hyperbolas in punctis E, F, vel Hyperbolam contingens in O, occurrat diametro ſecundæ MN in puncto P; erit rectangulum EPF contentum ſegmentis ſecantis, vel quadratum ex contingente PO, ad quadratum ex ſegmento PC inter rectam & centrum ſimul cum quadrato ex ſemidiametro MC, ut quadratum ex CA ſemidiametro cui ſecans vel contingens ſit parallela, ad quadratum ex MC ſemidiametro cui ſecans vel contingens occurrit.

Ducatur enim per P, recta QR ipſi MN ordinatim applicata, & ſit LV diameter ipſi MN conjugata, & proinde parallela rectæ QR; per Prop. præc. erit rectangulum FPE ad (rectangulum QPR ſive) quadratum ex PQ, ut quadratum

ex

itum
L ad
E ad
tum
) ad
dra-

tin-
cet,
ctæ
nter
gula
lam
ctæ
, &
.

llelâ
ſitæ
rit;
ct.

t in Fig. 36.
oto
um
ra-
dia-
ter
P
is:
am

UNIV. OF MICH.

erun
Nam
XR;
quor
ad P
ad P
angu
TNI
ipſi
Ce
toti
Hyp
junge
occu
MO,

FIG 35. Si
E;
ſe
te
P
tr
dr
ſi
ve

D
inde
ad (

ex CA ad quadratum ex CL, & per Prop. 32. erit quadratum ex QP ad quadrata ex PC, MC ſimul, ut quadratum ex CL ad quadratum ex CM: ergo ex æquo, erit rectangulum FPE ad quadrata ex PC, CM ſimul, ut quadratum ex CA ad quadratum ex CM: pari ratione erit quadratum ex contingente PO ad quadrata ex PC, CM ſimul, ut quadratum ex CA ad quadratum ex CM. *Q. E. D.*

PROP. XLII.

Si duæ rectæ ſibi invicem ſint parallelæ & ambæ contingant aut ſecent, vel earum una contingat, & altera ſecet, Hyperbolam vel Hyperbolas oppoſitas, & occurrant rectæ aſymptoto parallelæ; quadrata ex earum ſegmentis inter rectam aſymptoto parallelam & contactus, vel rectangula ſub earum ſegmentis inter hanc rectam, & Hyperbolam vel Hyperbolas, erunt inter ſe, ut ſegmenta iſtius rectæ aſymptoto parellelæ intercepta inter ipſas parallelas, & punctum in quo iſta recta occurrit uni ex Hyperbolis.

NAM (per Cor. 1. & 3. Def. 25.) recta aſymptoto parallelâ eſt parallela lateri ſuperficierum conicarum in quas poſitæ ſunt Hyperbolæ, & uni ex Hyperbolis in unico puncto occurrit; ergo conſtat hæc Propoſitio per Prop. 19. & Cor. 1. ad Def. Sect.

Cor. I. Hinc ſi diameter tranſverſa LV Hyperbolæ, occurrat in O rectæ KH aſymptoto CY parallelæ occurrenti alteri aſymptoto CZ in P, & Hyperbolæ in E; erit rectangulum VOL contentum ſegmentis diametri inter vertices ejus & rectam KH, ad quadratum ex ſemidiametro CV, ut OE ſegmentum rectæ KH inter diametrum & Hyperbolam, ad ſegmentum EP ejuſdem rectæ inter Hyperbolam & aſymptoton CZ; ducatur enim per punctum P recta parallela diametro LV, occurrens Hyperbolis in R, S punctis: Fig. 36.

H tum

tum per hanc Propoſitionem erit rectangulum VOL ad rectangulum RPS ſive (Prop. 39.) quadratum ex CV, ut OE ad EP.

Cor. II. Vel (manentibus jam poſitis) ſi diameter ſecunda MN occurrat ipſi KH in B; erit quadratum ex CB ſegmento diametri inter centrum & rectam KH una cum quadrato ex ſemidiametro CN, ad quadratum ex ſemidiametro CN, ut BE ſegmentum rectæ KH inter diametrum & Hyperbolam, ad PE ſegmentum ejuſdem rectæ inter aſymptoton CZ & Hyperbolam. Ducantur enim per puncta B, P rectæ AD, RS ordinatim applicatæ diametro MN, & ſit LV diameter ipſi MN conjugata, & proinde parallela ejus ordinatis; tum (per Prop. 32.) erit quadratum ex CB una cum quadrato ex CN, ad quadratum ex CN, ut quadratum ex AB, ad quadratum ex CV; hoc eſt, ut rectangulum ABD, ad rectangulum RPS (39. huj.) hoc eſt, (per hanc Prop.) ut BE, ad PE.

PROP. XLIII.

Si a puncto in Hyperbola ducantur ad aſymptotos duæ quævis rectæ, & ab alio quovis puncto in eadem, vel oppoſita Hyperbola ducantur ad aſymptotos aliæ rectæ prioribus parallelæ; erit rectangulum contentum primo ductis æquale rectangulo contento reliquis ductis.

Fig. 37. SINT A, B puncta in Hyperbola vel oppoſitis Hyperbolis, & per A ducantur ad aſymptotos rectæ AD, AE, & per B ducantur iis parallelæ BG, BF, erit rectangulum AD in AE æquale rectangulo BG in BF.

Nam ducatur recta AB occurrens aſymptotis in punctis M, N & (per Prop. 36.) erunt ſegmenta AM, BN, & proinde AN, BM æqualia; tum propter æquiangula triangula ADM, BGM, erit AD ad BG, ut AM ad BM, ſive ut BN ad AN, hoc eſt (propter æquiangula triangula BNF, ANE) ut BF ad AE, ergo erit

AD

AD ad BG, ut BF ad AE, ideoque erunt rectangula DAE, FBG inter ſe æqualia. *Q. E. D.*

Cor. I. Hinc, ſi a duobus punctis A, B in Hyperbola, vel in oppoſitis Hyperbolis, ducantur duæ rectæ AD & BG ad eandem vel diverſas aſymptotos & alteri aſymptoto parallelæ; erit rectangulum contentum ductâ AD & abſciſſâ DC inter ipſam & centrum C, æquale rectangulo contento ductâ BG & abſciſſâ GC; nam completis parallelogrammis CDAE, CGBF, erunt rectangula DAE, FBG, hoc eſt, rectangula ADC & BGC inter ſe æqualia.

Cor. II. Et (iiſdem poſitis) quoniam æqualia ſunt rectangula DAE, FBG, erit DA ad BG ut BF ad AE; ſed æquiangula ſunt parallelogramma DAEC, FBGC, ideoque erunt inter ſe æqualia, (per 14. 6.)

Cor. III. Si a puncto quovis A in Hyperbola AVB, ducatur recta AD ad unam aſymptoton, & alteri parallela, & ſumatur in alterutra aſymptoto punctum P, a quo ducatur recta PO verſus adjacentem Hyperbolam parallela alteri aſymptoto, & ſit rectangulum CPO æquale rectangulo CDA; erit punctum O in Hyperbola verſus quam recta PO fuit ducta. Recta enim PO alicubi occurret Hyperbolæ adjacenti (Cor. 3. ad Def. 25.) & ſi ei non occurrat in O, eſſet (per Cor. 1.) rectangulum majus vel minus ipſo CPO æquale rectangulo CDA, contra Hypotheſin.

DEFINITIO XXVI.

SINT Hyperbolæ oppoſitæ quarum LV ſit diameter tranſverſa, & MN diameter ſecunda ipſi LV conjugata; & per Fig. 38.
Prop. 35. ſint duæ Hyperbolæ oppoſitæ KMS, HNX, quarum

 MN

MN ſit diameter tranſverſa & LV diameter ſecunda ipſi MN conjugata; hæ quatuor Hyperbolæ dicuntur *Hyperbolæ conjugatæ*.

Cor. I. Patet Hyperbolis conjugatis idem eſſe centrum C, nempe interſectionem diametrorum LV & MN, & communes aſymptotos; nam manentibus quæ in definitione poſitæ fuerunt; jungatur VM & ducatur CY ipſam VM bifariam ſecans in D, et CZ ipſi VM parallela; & quoniam LV, MN ſunt diametri conjugatæ utriuſque Hyperbolæ TVO, KMS, rectæ CY, CZ ſunt aſymptoti Hyperbolæ TVO et ejus oppoſitæ, et etiam Hyperbolæ KMS ipſi TVO conjugatæ & ejus oppoſitæ HNX, per Cor. 3. 38. hujus.

Cor. II. Quoniam Hyperbolæ conjugatæ communes habent aſymptotos; patet ex propoſitione 36. quod ſi recta oppoſitis Hyperbolis terminata, contingat Hyperbolam iis conjugatam; in puncto contactus bifariam ſecabitur. Vel ſi occurrat Hyperbolæ conjugatæ in duobus punctis, ſegmenta ejus inter hanc Hyperbolam & Hyperbolas oppoſitas erunt æqualia.

PROP. XLIV.

Si ducatur diameter ſecunda cujuſvis Hyperbolæ; erunt vertices ejus in Hyperbolis iſti Hyperbolæ conjugatis.

Fig. 38. SINT Hyperbolæ conjugatæ, quarum ſunt LV, MN diametri communes conjugatæ, ut in definitione præcedente, & ſint aſymptoti communes CY, CZ, & jungatur VM aſymptoto CY occurrens in D, et ducatur BC*b* diameter ſecunda Hyperbolæ TVO; erunt vertices ejus B, *b*, in Hyperbolis conjugatis ipſi TVO.

Nam ducatur ſemidiameter CA ipſi CB conjugata, & jungatur AB occurrens aſymptoto CY in E, erit bifariam ſecta in E, & alteri aſymptoto CZ parallela (Cor. 1. Prop. 38.) & proinde parallela ipſi MV; propter æquales BE, EA erit rectangulum BEC æquale rectangulo

gulo AEC, hoc eſt VDC (per Cor. 1. Prop. præc.) ſive rectangulo MDC (ob æquales VD, DM) ergo cum punctum M ſit in Hyperbola KMS & rectæ MD, BE ſint parallelæ aſymptoto CZ, & rectangula MDC, BEC ſint æqualia, erit punctum B in eadem Hyperbola KMS (Cor. 3. Prop. præc.) et vertex ejus alter *b* erit in Hyperbola HNX ipſi KMS oppoſita.

Cor. I. Hinc ſi ad vertices duarum diametrorum conjugatarum CA, CB ducantur rectæ contingentes Hyperbolas conjugatas, ſibi invicem occurrent ad aſymptoton CY, cui recta jungens vertices A, B occurrit; nam per A ducatur recta contingens Hyperbolam TVO occurrens aſymptoto CZ in R, & CY in P, & jungatur PB occurrens aſymptoto CZ in Q; quoniam PAR contingit Hyperbolam, erunt PA, AR æquales (36. hujus) ergo propter parallelas RQ, AB (Cor. 1. Prop. 38.) æquales ſunt PB, BQ. Ergo recta PBQ contingit Hyperbolam in B (per Prop. 36.) & proinde contingentes per A, B ductæ occurrunt in puncto P ad aſymptoton CY.

Cor. II. Hinc etiam, diameter quævis ſecunda Hyperbolæ eſt diameter tranſverſa Hyperbolæ conjugatæ; & vice verſa.

PROP. XLV.

Si a duobus punctis in Hyperbolis conjugatis, ducantur ad eandem, vel diverſas aſymptotos, duæ rectæ aſymptotis parallelæ; erunt rectangula contenta ductis, & abſciſſis inter ipſas & centrum, æqualia.

SINT Hyperbolæ conjugatæ, quarum aſymptoti ſunt CZ, CY, et a puncto in una Hyperbola A, ducatur AE ad aſymptoton CY, parallela ipſi CZ, et a puncto F in Hyperbola conjugata, ducatur FG ad unam aſymptoton, et alteri parallela; erunt rectangula AEC, FGC, inter ſe æqualia. Fig. 38.

Jungantur

Jungantur enim V, M vertices diametrorum conjugatarum, erit jungens parallela uni aſymptoto, et ab altera bifariam ſecta in D, et (per Cor. 1. Prop. 43.) erunt rectangula AEC, VDC æqualia, ut et rectangula FGC, MDC; ſed rectangula VDC, MDC æquantur, et ergo rectangula AEC, FGC æqualia ſunt. *Q. E. D.*

Cor. I. Hinc, erunt parallelogramma AEC*e*, FGC*g*, æqualia, ut in Cor. 2. Prop. 43.

Cor. II. Hinc etiam, ſi duæ quævis rectæ PR, *pr*, contingant eandem Hyperbolam, vel oppoſitas, vel adjacentes Hyperbolas & occurrant aſymptotis in P, R, et *p*, *r*, punctis; triangula PCR, *p*C*r*, contenta inter contingentes et ſegmenta aſymptotorum, erunt inter ſe æqualia. Nam a punctis contactuum A, F, ducantur AE, A*e* et FG, F*g* aſymptotis parallelæ; tum propter PA, AR æquales, erunt PE, EC, et etiam C*e*, *e*R æquales: ergo triangulum PCR eſt duplum parallelogrammi AEC*e*; eodem modo oſtendetur triangulum *p*C*r* eſſe duplum parallelogrammi FGC*g*: ſed hæc parallelogramma æquantur (Cor. præc.) ergo ipſa triangula æquantur.

Cor. III. Hinc etiam, ſi recta Hyperbolis adjacentibus terminata, ſit uni aſymptoto parallela; erit ab altera bifariam ſecta. Sit enim recta AB Hyperbolis adjacentibus terminata & parallela aſymptoto CZ, et occurrat ipſi CY in E; quoniam per hanc Prop. rectangula AEC, BEC ſunt æqualia, erunt ipſæ rectæ AE, EB æquales, ut patet.

Cor. IV. Et contra, ſi AB Hyperbolis conjugatis terminata ſit bifariam ſecta aſymptoto CY; erit alteri aſymptoto CZ parallela. Nam ſi non, duci poteſt recta a puncto A ad punctum aliquod K in Hyperbola adjacente recta parallela ipſi CZ, hæc recta AK ab aſymptoto CY quoque bifariam ſecabitur (per Cor. præced.) ergo aſymptoton CY erit parallela rectæ jungenti duo puncta B, K in Hyperbola (per 2. 6.) quod fieri nequit: Cor. 3. ad Def. 25.

Cor. V. Ex hac Prop. et Cor. 2. Prop. 43. patet, quod ſi ducantur duæ rectæ a punctis in eadem Hyperbola, vel in duabus

ex

ex quatuor Hyperbolis conjugatis ad unam aſymptoton & alteri aſymptoto parallelæ; ipſæ ductæ erunt inter ſe reciproce ut ſegmenta abſciſſa inter ipſas et centrum: et proinde Hyperbola et aſymptoti in infinitum productæ ad ſeipſas proprius accedunt, & ad intervallum proveniunt minus quolibet dato intervallo.

Cor. VI. Si per punctum A in Hyperbola TAO, ducatur recta occurrens Hyperbolis conjugatis BMS, HNX in punctis K & H; rectangulum KAH erit duplum quadrati ex ſemidiametro CM quæ ipſi KH eſt parallela. Ducatur enim per A ſemidiameter CA, erit hæc ſemidiameter ſecunda Hyperbolarum BMS, HNX, (Cor. 2. 44. hujus) ergo per Prop. 41. rectangulum KAH erit ad quadratum ex CA bis ſumptum, ut quadratum ex CM ad quadratum ex ipſa CA: ergo rectangulum KAH eſt duplum quadrati ex CM.

PROP. XLVI.

Si per punctum in Hyperbola ducantur duæ rectæ indefinitæ aſymptotis parallelæ, & occurrentes cuivis diametro; erit ſemidiameter media proportionalis inter ſegmenta diametri intercepta inter centrum, & rectas quibus occurrit.

PER punctum A Hyperbolæ TVO, ducantur rectæ DE, FG aſymptotis CY, CZ parallelæ, & occurrant primum diametro tranſverſæ LCV in P, Q punctis, erunt CP, CV, CQ proportionales. Fig. 39.

Nam occurrat FG aſymptoto CY in X, & a punctis V, P, ducantur ad CY rectæ V*r*, PS parallelæ ipſi FG ſeu CZ, erit PS æqualis ipſi AX; propter parallelas erit CS ad C*r*, ut (SP ſeu) XA ad *r*V, hoc eſt (per Cor. 5. præc.) ut C*r* ad CX: ergo quoniam CS, C*r*, CX, ſint proportionales, erunt, propter parallelas, ipſæ CP, CV & CQ proportionales.

Occurrant

Occurrant nunc hæ rectæ DE, FG diametro ſecundæ MCN in K, H punctis, & ſit vertex ejus M in Hyperbola ipſi TVO conjugata, cui occurrat recta FG in puncto B, a quo ducatur BR parallela ipſi DE ſeu CY, & occurrens diametro MN in R, per caſum primum erunt CR, CM, CH proportionales: ſed propter parallelas, et rectas AX, XB æquales (per Cor. 3. præc.) erunt rectæ KC, CR æquales: ergo ipſæ CK, CM, CH ſunt proportionales. *Q. E. D.*

SCHOLIUM.

Fig. 39. *SI duæ rectæ indefinitæ DE, FG ſe invicem ſecent in A, & circa punctum quodvis datum C extra rectas DE, FG poſitum, revolvatur alia recta indefinita, & in hac revolvente, dum occurrit, ut in punctis P, Q lateribus anguli EAF extra quem ponitur C, vel anguli GAD huic verticalis, ſumatur punctum V ad eaſdem partes puncti C ad quas ſunt P, Q, ita ut ſegmenta CP, CV, CQ ſint ſemper proportionalia; erit* Locus *omnium punctorum V, Hyperbola TVO, tranſiens per A, cujus centrum eſt punctum datum C, & cujus aſymptoti ſunt ipſis DE, FG parallelæ, & cum iis tandem coincidet recta revolvens; & ſi interea ad contrarias partes puncti C ſumatur punctum L, ita ut CL ſit ſemper æqualis ipſi CV, erit* Locus *punctorum L, Hyperbola ipſi TVO oppoſita. Si vero in recta revolvente, dum occurrit ut in punctis K, H, lateribus anguli EAG intra quem ponitur C, ſumantur duo puncta M, N, ita ut ſegmenta CK, CM vel CN, & CH ſint proportionalia:* Loci *omnium punctorum M, N, erunt Hyperbolæ oppoſitæ prioribus Hyperbolis conjugatæ.*

PROP.

PROP. XLVII.

Si a Puncto parabolæ F ducatur ad diametrum BA recta FE ipſi ordinatim applicata, & recta Parabolam contingens, eidem diametro occurrens in D; erit ED ſegmentum diametri inter ordinatam & contingentem bifariam ſectum in vertice ejus B. Fig. 40.

OCCURRAT enim ordinata FE producta Parabolæ iterum in L, et per punctum F ducatur diameter FG, ad quam ducantur rectæ LG, EC, BH parallelæ contingenti FD, erunt LG, BH ordinatæ diametro FG (Cor. 27. huj.) et erit EC æqualis ipſi BH; quoniam igitur eſt LF dupla ipſius EF, erit (2. 6.) GF dupla ipſius CF, et LG dupla ipſius EC ſive BH, et ergo quadratum ex LG eſt quadruplum quadrati ex BH (4. 2.) eſt igitur abſciſſa GF quadrupla abſciſſæ HF (29. huj.) ideoque eſt CF dupla ipſius HF, et proinde eſt ED dupla ipſius BD; ergo ED ſegmentum diametri in vertice ejus B bifariam ſecatur. *Q. E. D.*

PROP. XLVIII.

Si a puncto Ellipſeos F ducatur FE ordinatim applicata ad diametrum AB, & recta Ellipſim contingens eidem diametro occurrens in D; erit ſemidiameter CB media proportionalis inter CE, CD, ſegmenta ſciz. diametri inter centrum & ordinatam, & inter centrum & contingentem. Fig. 41.

DUCANTUR enim per vertices diametri AB rectæ Ellipſim contingentes, et occurrentes contingenti per F ductæ, in punctis H, G; hæ contingentes erunt parallelæ ordinatæ FE (Cor. 1. 25. hujus;) in diametro AB ſumatur CT æqualis ipſi CE, erunt etiam AT, EB æquales: Sed (per Cor. 5. Prop. 18. hujus &

22. 6.) eſt AH ad BG, ut HF ad FG ſive (propter parallelas) ut AE ad EB, erit igitur AE ad EB, ut AD ad BD: et ergo dividendo, erit TE ad EB, ut AB ad BD, & ſumendo dimidia antecedentium, erit CE ad EB, ut CB ad BD, & ergo convertendo, eſt CE ad CB, ut CB ad CD. *Q. E. D.*

PROP. XLIX.

Si a puncto Hyperbolæ ducatur ad diametrum recta ei ordinatim applicata & recta Hyperbolam contingens eidem diametro occurrens; erit ſemidiameter media proportionalis inter ſegmenta diametri, inter centrum & ordinatam, & inter centrum & contingentem.

Fig. 42. *Caſ.* 1. QUANDO ordinata ducitur ad diametrum tranſverſam. Sit Hyperbola cujus diameter tranſverſa eſt AB, & centrum C, & a puncto in ipſa F ducatur FE ordinatim applicata ad diametrum AB & contingens eidem diametro occurrens in D; erit CE ad CB, ut CB ad CD.

Ducantur enim per vertices diametri AB duæ contingentes occurrentes contingenti per F ductæ in punctis H, G quæ erunt ordinatæ FE parallelæ (Cor. 1. 25. huj.) & ſumatur CT æqualis ipſi CE, erunt etiam AT, BE æquales. Sed per Cor. 5. Prop. 18. hujus & 22. 6) eſt AH ad BG, ut HF ad GF, hoc eſt, (propter parallelas AH, GB, FE) ut AE ad BE, & ut AH ad BG, ita eſt AD ad DB; erit igitur AE ad BE ut AD ad DB & ergo componendo, TE erit ad BE, ut AB ad DB, & ſumendo dimidia antecedentium, erit CE ad BE, ut CB ad DB, & ergo convertendo, eſt CE ad CB, ut CB ad CD.

Caſ. 2. Quando ordinata ducitur ad diametrum ſecundam. A puncto Hyperbolæ F ducatur FO ordinata ad diametrum ſecundam MN, cui contingens per F ducta occurrit in P, & ſit AB diameter tranſverſa ipſi MN conjugata, occurrens contingenti FP in D,

D, & ipſi AB ducatur FE ordinatim applicata, erit ipſi CO parallela & æqualis.

Quoniam, per caſum præcedentem, ſunt EC, BC, DC proportionales, erit quadratum ex EC ad quadratum ex BC, ut EC ad DC (Cor. 20. 6.) ergo dividendo, erit rectangulum BEA ad quadratum ex BC, ut ED ad DC; ſed quadratum ex ordinata FE eſt ad quadratum ex ſemidiametro ſecunda CM, ut rectangulum BEA ad quadratum ex BC ut conſtat ex Def. 24. ergo quadratum ex FE eſt ad quadratum ex CM, (ut ED ad DC, hoc eſt,) ut ipſa FE ad CP: ergo FE, CM, CP ſunt proportionales (per converſ. Cor. 20. 6.) ergo ſunt CO, CM, CP proportionales. *Q. E. D.*

Corollaria ad duas præcedentes.

Cor. I. Si recta contingens Ellipſim aut Hyperbolam in puncto quovis F, occurrat ejus diametro AB (quæ in Hyperbola ſit tranſverſa) in D, & a contactu ducatur ordinata FE ad diametrum, erit rectangulum CED contentum ſegmentis diametri, inter ordinatam & centrum, & inter eandem & contingentem, æquale rectangulo AEB contento ſegmentis inter ordinatam & vertices diametri. Nam quoniam, (per præcedentes & 17. 6.) eſt rectangulum ECD æquale quadrato ex CB; ſi in Ellipſi utrinque auferaur quadratum ex CE, erit reliquum ſciz. rectangulum CED æquale reliquo rectangulo AEB (per 3. & 5. 2.) & in Hyperbola demptis hiſce æqualibus ſciz. rectangulo ECD & quadrato ex BC, a quadrato ex EC, erit reliquum rectangulum CED æquale reliquo rectangulo AEB, per 2. & 6. 2. Fig. 41, 42.

Cor. II. Occurrant jam contingens & ordinata a puncto F ductæ, diametro ſecundæ CM in P & O, & quoniam rectangulum PCO æquale eſt quadrato ex CM; addatur utrinque quadratum ex CO, & erit (3. 5.) rectangulum POC æquale quadratis ex CM, CO ſimul. Fig. 42.

Fig. 41, 42. Cor. III. Et rectangulum ADB; contentum ſegmentis inter contingentem & vertices diametri (quæ in Hyperbola ſit tranſverſa) erit æquale rectangulo CDE; contento ſegmentis inter contingentem & centrum, & inter eandem & ordinatam. Nam in Ellipſi, ablatis æqualibus ſciz. quadrato ex CB & rectangulo ECD, a quadrato quod fit ex CD, erit reliquum ADB æquale reliquo CDE (per 6. & 2. 2.) & in Hyperbola, ſi ab æqualibus ſciz. quadrato ex CB, & rectangulo ECD, auferatur quadratum ex CD, erit reliquum ADB æquale reliquo CDE, per 5. & 3. 2.

PROP. L.

Si duæ rectæ parallelæ contingentes Ellipſim, aut Hyperbolas oppoſitas, occurrant alii cuivis contingenti; rectangulum contentum ſegmentis parallelarum inter contactus, & contingentem cui occurrunt, erit æquale quadrato ex ſemidiametro, cui contingentes ſunt parallelæ. Et rectangulum contentum ſegmentis contingentis cui parallelæ occurrunt, ſciz. inter ejus contactum & ipſas parallelas, erit æquale quadrato ex ſemidiametro cui ipſa contingens eſt parallela.

Fig. 41, 42. CONTINGANT parallelæ AH, BG Ellipſim, aut Hyperbolas in punctis A, B, & occurrant contingenti per quodvis punctum F ductæ in H & G; erit rectangulum AH in BG æquale quadrato ex ſemidiametro CM ipſis AH, BG parallela. Et erit rectangulum HFG æquale quadrato ex CK ſemidiametro ipſi HG parallela.

Erit enim juncta AB diameter (Cor. 2. 22. huj.) & ipſi CM conjugata (Cor. 27. huj.) ſi in Ellipſi contingens HG ſit ipſi AB parallela, Propoſitio per ſe manifeſta eſt. Si autem non ſit parallela ipſi AB, occurrat ei in D & CM producta in P, & a puncto

puncto F ducantur FE, FO ordinatim applicatæ ad diametros AB, CM.

Pars 1. Quoniam per Cor. 3. præc. eſt rectangulum ADB æquale rectangulo CDE, erit AD ad CD, ut eſt ED ad BD (16. 6.) ergo, propter parallelas, erit AH ad CP, ut eſt EF ad BG, (2. 6.) & ergo rectangulum AH in BG æquatur rectangulo CP in EF ſive CO, hoc eſt, quadrato ex ſemidiametro CM: nam per duas præcedentes CO, CM, CP ſunt proportionales.

Pars 2. Quoniam eſt AH ad BG, ut HF ad FG (Cor. 5. 18. huj. & 22. 6.) erit rectangulum HFG ſimile rectangulo AH in BG et proinde eſt ad idem AH in BG, ut quadratum ex HF ad quadratum ex AH, hoc eſt, ut quadratum ex CK ad quadratum ex CM (per 31. et 40. huj.) ergo alternando, eſt rectangulum HFG ad quadratum ex CK, ut rectangulum AH in BG ad quadratum ex CM, hoc eſt, in ratione æqualitatis per partem primam. *Q. E. D.*

PROP. LI.

Si recta linea contingens Ellipſim, aut Hyperbolam in quovis puncto F, occurrat duabus diametris conjugatis AB & CM in punctis D, P; erit rectangulum PFD contentum ſegmentis contingentis inter contactum & diametros æquale rectangulo ex ſemidiametro CK, quæ ipſi contingenti eſt parallela. FIG. 41, 42.

DUCATUR enim a puncto contactus F, recta FE ordinatim applicata diametro AB, (quæ in Hyperbola ſit tranſverſa) et a terminis hujuſce diametri, ducantur contingentes quæ occurrant contingenti per F ductæ, in H, G punctis, erunt parallelæ ordinatæ FE, et diametro CM. Quoniam igitur per Cor. 1. 49. huj. eſt rectangulum CED æquale rectangulo AEB, erit CE ad EB, ut eſt AE ad ED; ergo, propter parallelas, erit PF ad FG, ut eſt

HF ad FD et ergo rectangulum PFD eſt æquale rectangulo HFG, hoc eſt, quadrato ex ſemidiametro CK, per partem ſecundam præcedentis. *Q. E. D.*

Cor. Manifeſtum eſt, ſi recta PFD contingens Ellipſim, aut Hyperbolam, occurrat duabus diametris CB, CM, fueritque rectangulum PFD æquale quadrato ex ſemidiametro CK conjugata ei quæ per contactum F tranſit, quod diametri CB, CM, ſunt conjugatæ.

PROP. LII. PROBL. IV.

Datâ poſitione Sectione Conicâ, & puncto extra ipſam dato; ducere duas rectas, quæ contingant ſectionem, vel ſectiones oppoſitas, modo punctum datum non ſit in aſymptoto Hyperbolæ.

Fig. 40, 41, 42, 43. SIT ſectio data FL, et punctum datum D; per D ducatur diameter ſectioni occurrens in B, vel ſi fuerit diameter ſecunda Hyperbolæ ſit ejus vertex ſeu terminus B. Si ſectio ſit Parabola, fiat BE æqualis ipſi BD, et per E ducatur FEL parallela ordinatim applicatis diametro BE, occurrens Parabolæ in L, F punctis; junctæ DL, DF ſectionem contingent; ſi enim alterutra, puta DL non contingat, ſit LR contingens diametro BE occurrens in R, erit (per 47. huj.) BR æqualis ipſi BE, hoc eſt ipſi BD, quod eſt abſurdum.

Si autem ſectio ſit Ellipſis, aut Hyperbola; ſit ejus centrum C, ipſis CD, CB inveniatur tertia proportionalis CE (ponenda ad partes centri contrarias iis ad quas eſt CD, ſi fuerit CD ſecunda diameter Hyperbolæ, ſecus ad eaſdem) perque punctum E ducatur recta FEL parallela ordinatim applicatis diametro CD, occurrens ſectioni in L, F punctis; junctæ DL, DF ſectionem, vel ſectiones oppoſitas contingent.

Si enim alterutra, puta DL, non contingat, ſit LR contingens, diametro CD occurrens in R: erunt CE, CB, CR, proportionales (per 48, 49. huj.) *Q. E. A.*

Si

IG. 44,
45.

UNIV. OF MICH.

Fig. 4
4
4
4.

Si punctum datum D ſit in aſymptoto Hyperbolæ, in hoc puncto duæ contingentes convenire nequeunt (Cor. 5. 39. hujus) methodus vero ducendi rectam, quæ Hyperbolam adjacentem contingat, oſtenſa fuit in Cor. 5 Prop. 36.

PROP. LIII.

Si duæ rectæ contingentes ſectionem conicam vel ſectiones oppoſitas ſibi invicem occurrant, & per punctum in una contingente ducatur recta alteri parallela, occurrens rectæ jungenti contactus, & conveniens in duobus punctis cum ſectione conica; erit quadratum ex ſegmento ejus inter contingentem & jungentem contactus, æquale rectangulo contento ſegmentis interceptis inter contingentem, & ſectionem. FIG. 44, 45.

CONTINGANT rectæ AB, AC ſectionem conicam vel ſectiones oppoſitas in B, C punctis, jungatur BC & per punctum D in una contingente AC, ducatur recta alteri AB parallela, occurrens ipſi BC in G, et ſectioni in E, F punctis; erit quadratum ex DG æquale rectangulo EDF.

Nam quoniam contingens AC occurrit parallelis FD, BA, rectangulum EDF contentum ſegmentis ſecantis, eſt ad quadratum ex contingente BA, ut quadratum ex DC ad quadratum ex AC, (per Cor. 6. 18. huj.) hoc eſt (ob ſimilia triangula) ut quadratum ex DG ad quadratum ex BA: ergo rectangulum EDF et quadratum ex DG æquantur. *Q. E. D.*

COR. Occurrant ſibi invicem in puncto A, duæ rectæ contingentes ſectionem conicam, vel ſectiones oppoſitas, ſi a quovis puncto P in una contingente AC, ducatur recta alteri contingenti parallela, occurrens jungenti contactus in L, & ab eodem P ducatur quævis

quævis recta ſecans ſectionem, vel oppoſitas ſectiones in punctis R, Q; rectangulum RPQ & quadratum ex recta PL, erunt inter ſe, ut quadrata ex ſegmentis contingentium, quæ ſunt ipſis PRQ, PL parallelæ, interceptis inter earum occurſum & contactus; vel ut quadrata ex ſemidiametris quæ ſunt ipſis PRQ, PL parallelæ.

Nam a puncto D in contingente AC ducantur duæ rectæ ipſis PRQ, PL parallelæ, ſecantes ſectionem vel oppoſitas ſectiones in punctis O, N, & E, F, & occurrat recta DEF, ipſi PL parallela, jungenti contactus in G: quoniam igitur contingens AC occurrit duabus parallelis ſecantibus, erit (per Cor, 4. 18. huj.) rectangulum RPQ ad rectangulum ODN, ut quadratum ex PC ad quadratum ex DC, hoc eſt (ob ſimilia triangula) ut quadratum ex PL ad quadratum ex DG ſive rectangulum EDF (per hanc Prop.) ergo alternando, rectangulum RPQ eſt ad quadratum ex PL, ut rectangulum ODN ad rectangulum EDF, hoc eſt per 18. hujus, ut quadrata ex ſegmentis contingentium, quæ ſunt ipſis PRQ, PL parallelæ, interceptis inter earum occurſum & contactus; vel ut quadrata ex ſemidiametris Ellipſeos aut Hyperbolæ quæ ſunt ipſis PRQ, PL parallelæ, per 31, & 40. hujus.

LEMMA II.

FIG. 46. A Puncto E in recta quavis indefinita ſumantur rectæ EA, ED ad eaſdem partes puncti E, & ab eodem puncto E ſumatur recta EB cujus terminus B ſit vel inter A & D vel ad alteras partes puncti E; ſi quadratum ex AB ſit ad quadratum ex DB, ut ipſa AE ad DE; erit recta EB media proportionalis inter ipſas AE & DE.

Nam ſi non, a puncto E ſumatur verſus B recta EF, major vel minor ipſa EB, quæ ſit media proportionalis inter AE & DE; quoniam igitur proportionales ſunt AE, FE, DE, erit (convertendo & alternando) ut prima AE ad ſecundam FE, ita AF ſumma vel differentia primæ & ſecundæ, ad DF ſummam vel differentiam

ſecundæ

ſecundæ & tertiæ, ergo erit quadratum ex AF ad quadratum ex DF, ut quadratum ex AE ad quadratum ex FE, hoc eſt, ut ipſa AE ad tertiam DE, ſive (per conſtruc.) ut quadratum ex AB ad quadratum ex DB; erit igitur ipſa AF ad DF, ut AB ad DB, quod eſt abſurdum; ut per ſe manifeſtum eſt cum puncta F, B ſunt inter ipſa A, D; & ſi F, B ſint ad alteras partes puncti E, patet etiam quod ratio inter rectas inæquales AF, DF non eadem manebit ſi iſtis rectis addatur vel auferatur eadem recta FB. Ergo recta major vel minor ipſâ EB non eſt media proportionalis inter AE, DE; eſt igitur recta EB media inter ipſas.

PROP. LIV.

Si Parabolæ diameter, vel recta aſymptoto Hyperbolæ parallela, occurrat duabus contingentibus, & rectæ jungenti contactus; erit quadratum ex ſegmento ejus inter ſectionem & jungentem contactus, æquale rectangulo contento reliquis ejus ſegmentis; ſciz. inter ſectionem & contingentes.

CONTINGANT duæ rectæ MN, MO Parabolam, Hyperbolam, vel oppoſitas Hyperbolas in punctis N, O, ducatur recta TX quæ, ſit diameter Parabolæ vel aſymptoto Hyperbolæ parallela, occurrens Parabolæ vel alterutri Hyperbolæ in E; contingentibus in A, D & jungenti contactus in B; erit quadratum ex EB æquale rectangulo AED. Fig. 47, 48.

Caſ. 1. Si rectæ contingentes Parabolam, vel Hyperbolam ſibi invicem occurrant in M, a puncto D in quo TX uni e contingentibus occurrit, ducatur recta alteri contigenti parallela ſecans ſectionem in punctis P, L & jungentem contactus in K, quod ſemper fieri licet: per Prop. præc. quadratum ex DK eſt æquale rectangulo PDL, & propter parallelas AO, DK erit quadratum ex Fig. 47.

K AB

AB ad quadratum ex DB, ut quadratum ex AO ad quadratum ex DK ſive rectangulum PDL, hoc eſt (Prop. 19.) ut ipſa AE ad DE; ſed rectæ AE, BE, DE ſumptæ ſunt a puncto E ut in Lemmate præcedente, ergo ſunt proportionales per idem Lemma, & proinde quadratum ex BE eſt æquale rectangulo AED.

FIG. 48. *Caſ.* 2. Si rectæ contingentes Hyperbolas oppoſitas ſibi invicem occurrant in M; ducatur ab alterutro puncto A vel D, puta D, recta parallela alteri contingenti AO occurrens jungenti contactus in K, & per puncta A, D ducantur duæ rectæ ſibi invicem parallelæ ſecantes oppoſitas Hyperbolas in punctis G, H & P, L. Per Prop. 40. rectangulum GAH & quadratum ex AO erunt inter ſe ut quadrata ex ſemidiametris quibus rectæ GH, AO ſunt parallelæ, & per Cor. præc. rectangulum PDL & quadratum ex DK erunt inter ſe ut quadrata ex iiſdem ſemidiametris, ergo alternando, rectangulum GAH erit ad rectangulum PDL, ut quadratum ex AO ad quadratum ex DK ſive (ob parallelas AO, DK) ut quadratum ex AB ad quadratum ex DB; ſed (Prop. 19.) rectangulum GAH eſt ad rectangulum PDL, ut ipſa AE ad DE, & proinde quadratum ex AB eſt ad quadratum ex DB, ut AE ad DE, ergo proportionales ſunt rectæ AE, BE, DE (Lem. præc.) ideoque quadratum ex BE eſt æquale rectangulo AED.

Caſ. 3. Si vero rectæ AO, DN contingentes oppoſitas Hyperbolas fuerint ſibi invicem parallelæ, tum ipſorum quadrata eſſent inter ſe ut quadrata ex AB, DB ob ſimilia triangula ABO, DBN, & eſſent etiam inter ſe ut ipſæ AE, DE per Prop. 19. ergo eſſet quadratum ex AB ad quadratum ex DB, ut ipſa AE ad DE, ideoque eſſent rectæ AE, BE, DE proportionales & quadratum ex BE æquale eſſet rectangulo AED ut prius. *Q. E. D.*

COR. I. Si recta TX Parabolæ diameter vel aſymptoto Hyperbolæ parallela occurrens ſectioni in E, conveniat in puncto A cum recta ſectionem contingente in O, & in B cum recta ſectionem vel

oppoſitas

oppoſitas ſectiones ſecante in punctis; O, N et a puncto E ſumatur, extra ſectionem in ipſa TX, recta DE quæ ſit tertia proportionalis ipſis AE et BE; erit juncta DN contingens. Nam ſi non, recta contingens ſectionem in N occurreret ipſi TX extra ſectionem in aliquo puncto C diverſo a puncto D, et proinde per hanc Prop. recta CE eſſet tertia proportionalis ipſis AE et BE, contra hypotheſin: ergo recta DN continget ſectionem in N.

Cor. II. Hinc ſi a puncto M, occurſu duarum rectarum contingentium Parabolam, Hyperbolam, vel oppoſitas Hyperbolas in punctis N, O, ducatur ad jungentem contactus recta MF, quæ ſit Parabolæ diameter, vel aſymptoto Hyperbolæ parallela, bifariam ſecabitur a ſectione in S. Nam ſi MS, FS non ſint æquales; a puncto S ſumatur extra ſectionem in MF recta SR quæ ſit tertia proportionalis ipſis MS, FS et (per Cor. præc.) juncta RN, vel RO, continget ſectionem in N vel O (contra 16. hujus) ergo MS, FS ſunt æquales.

In hocce corollario continentur Prop. 35. Lib. 1. et Prop. 30, 31. Libri 3. *Apollonii.*

SCHOLIUM.

SIT MNO triangulum cujus latera utrinque indefinite producuntur, & ſit TX recta ſecans omnia latera iſtius trianguli, & moveatur ita ut ſit ſibi ſemper parallela, & in ea ſumatur punctum E, ita ut quadratum ex ſegmento EB inter punctum E & datum latus trianguli NO, ſit ſemper æquale rectangulo AED contento ſegmentis rectæ TX inter punctum E, & reliqua latera trianguli. Si recta TX, cum bifariam ſecet datum latus trianguli NO, tranſeat per angulum oppoſitum M, Locus *omnium punctorum E, erit Parabola, cujus diametri ſunt parallelæ rectæ mobili TX, & quam rectæ MN, MO contingent in punctis N, O. Si vero recta mobilis bifariam ſecans latus NO, non tranſeat per angulum M;* Locus *omnium punctorum erunt Hyberbolæ oppoſitæ, quarum una aſymptotos eſt rectæ TX parallela; & iſta aſymptotos facile invenitur ſciz. ducendo rectam ipſi TX* Fig. 47, 48.

parallelam

parallelam cujus ſegmentum interceptum inter latera trianguli MN & MO biſariam ſecaretur a reliquo latere NO, ut patet (ex Cor. 3. Prop. 40.) cum hæc aſymptotos tranſeat inter puncta N, O, rectæ MN, MO contingent in punctis N, O oppoſitas Hyperbolas motu puncti E genitas, aliter contingent in iſtis punctis unam ex Hyperbolis oppoſitis motu puncti E genitis; recta ducta per M biſariam ſecans ipſam NO erit (per Prop. 26.) diameter, & occurſus ejus cum aſymptoto erit centrum Hyperbolarum; unde invenitur altera aſymptotos. Vel ſi recta mobilis TX occurrat duabus parallelis MO, MN & rectæ cuivis ON ipſas ſecanti, & in ipſa TX ſumatur punctum E, ita ut quadratum ex EB ſegmento rectæ TX inter punctum E & rectam ON æquale ſit rectangulo AED contento ſegmentis inter idem E & parallelas; punctum E motu ſuo deſcribet Hyperbolas oppoſitas, quas contingent parallelæ in punctis O, N.

PROP. LV.

Si a duobus datis punctis in Parabola, Hyperbola, vel Hyperbolis oppoſitis inflectantur ad tertium quodvis punctum in iſta Parabola, vel alterutra Hyperbolarum duæ rectæ occurrentes rectæ poſitione datæ, quæ ſit Parabolæ diameter, vel aſymptoto Hyperbolæ parallela; ſegmenta hujuſce rectæ, inter inflexas & punctum in quo ſectioni occurrit, erunt ſemper inter ſe in eadem ratione, ubicunque in ſectione cadit punctum ad quod rectæ inflectuntur.

FIG. 49, 50, 51. SINT N, M, duo puncta data in Parabola, Hyperbola, vel oppoſitis Hyperbolis, et ſit recta TX diameter Parabolæ, vel parallela aſymptoto Hyperbolæ, occurrens ſectioni in puncto dato E, et a punctis N, M, inflectantur ad quodvis punctum O in ipſa Parabola, vel in alterutra Hyperbolarum duæ rectæ NO, MO occurrentes

currentes ipſi TX in punctis B, C, erunt abſciſſæ EB, EC, inter ſe in eadem ratione ubicunque in ſectione ſumatur punctum O.

Ducantur enim per tria puncta M, N, O, tres contingentes, quæ occurrant ipſi TX in tribus punctis F, D, A, & jungatur MN occurrens ipſi TX in G, conſtat ex Prop. præc. ipſas ED, EG, & EF eſſe proportionales.

Quoniam recta TX occurrit duabus contingentibus DN, AO in punctis D, A, & jungenti contactus in B, erit quadratum ex EB æquale rectangulo AED, (Prop. præc.) & ſimiliter, quoniam eadem recta occurrit contingentibus MF, AO in punctis F, A, & jungenti contactus in C, erit quadratum ex EC æquale rectangulo AEF: ergo quadratum ex EB eſt ad quadratum ex EC, ut rectangulum AED ad AEF, hoc eſt, ut ED ad EF, ſive ut quadratum ex ED ad quadratum ex EG media ſciz. inter ipſas ED, EF, erit igitur ipſa EB ad EC, ut ED ad EG; ſed propter puncta M, N, data & rectam TX poſitione datam, ſegmenta ED, EG manent ſemper eadem: ergo, tranſlato puncto O per totam Parabolam, Hyperbolam, vel Hyperbolam oppoſitam, rectæ EB, EC ſegmenta ipſius TX inter inflexas & ſectionem, erunt inter ſe ſemper in eadem ratione, ſciz. ut ipſæ ED, EG vel EG, EF. *Q. E. D.*

Eſt hæc (quatenus Parabolam reſpicit) Propoſitio quam Dom. *Fermat. Wallifio* demonſtrandum propoſuit in Epiſtola ad Dom. *Kenelm. Digby*, (vide p. 858. Tom. 2. Oper. Math. *Walliſii*;) eadem vero affectio Hyperbolis convenit, ut in hac demonſtratione generali oſtenſum eſt.

PROP.

PROP. LVI.

Si ſectioni conicæ vel ſectionibus oppoſitis inſcribatur trapezium, ejuſque omnia latera indefinite producantur, & a puncto quovis in ſectione ducantur duæ rectæ parallelæ duobus trapezii lateribus adjacentibus; rectangula contenta ſegmentis harum rectarum inter punctum in ſectione, & oppoſita latera trapezii, erunt inter ſe, ut quadrata contingentium vel ſemidiametrorum quibus ipſæ rectæ ſunt parallelæ.

Caſ. 1. SIT AB*d*C trapezium ſectioni conicæ vel ſectionibus oppoſitis inſcriptum, & primum ſint duo latera ejus AC, B*d* parallela, & a puncto quovis in ſectione E, ducantur duæ rectæ lateribus adjacentibus AB, AC parallelæ, occurrentes oppoſitis lateribus trapezii in punctis Q.*n* & *b*, R; erunt rectangula QE*n*, *b*ER inter ſe, ut quadrata contingentium vel ſemidiametrorum, quibus ipſæ E*n*, E*b* ſunt parallelæ. Occurrat enim *b*ER, ſectioni iterum in T, & ducatur recta MK bifariam ſecans parallelas AC, B*d*, erit diameter ſectionis, & bifariam ſecabit in puncto V, tam rectam TE ſectione terminatam (per Cor. 6. & 5. Prop. 25.) quam rectam *b*R, terminatam rectis C*d*, AB, & parallelam rectis biſectis AC, B*d*; ergo æquales ſunt *b*E, TR, ergo rectangulum *b*ER æquale eſt rectangulo TRE & (propter parallelogramma) rectangulum QE*n* æquale eſt rectangulo ARB, ergo rectangula *b*ER, QE*n* ſunt inter ſe, ut rectangula TRE, ARB, hoc eſt, ut quadrata contingentium vel ſemidiametrorum quibus ipſæ rectæ E*b*, E*n* ſunt parallelæ, per Prop. 18. vel 31. & 40.

FIG. 52, 53.

Caſ. 2. Sit ABDC trapezium inſcriptum, cujus nulla latera ſunt parallela, & per punctum in ſectione E, ducantur duæ rectæ ipſis AB, AC parallelæ, occurrentes oppoſitis lateribus trapezii in punctis

QN,

Q,N, & H, R, erunt rectangula HER, QEN inter ſe ut quadrata contingentium vel ſemidiametrorum quibus ipſæ HE, EN ſunt parallelæ.

Ducatur enim per B recta lateri AC parallela, ſectioni iterum occurrens in *d*, & rectæ EN in *n*, occurrat recta jungens *d*, C ipſi EH in *b*, & per punctum D ducatur recta lateri AC parallela, ſectioni iterum occurrens in F, & lateri AB in G, & junctæ *d* C in S; ducatur recta KM bifariam ſecans parallelas AC & B*d*, erit diameter ſectionis & bifariam ſecabit in O tam rectam DF ſectione terminatam (ut in caſu præcedente) quam rectam SG ipſis AC, B*d* parallelam, ergo æquales ſunt SD & FG: propter ſimilia triangula HC*b*, DCS, erit H*b* ad (SD ſive) FG, ut (C*b* ad CS, hoc eſt ut RA ſive) EQ ad AG; & propter ſimilia triangula NB*n*, GDB, erit (*n*B ſive) ER ad DG, ut N*n*, ad BG; ergo ducendo antecedentes primi ordinis proportionalium in antecedentes ſecundi & conſequentes in conſequentes, erit rectangulum H*b* in ER, ad rectangulum DGF, ut rectangulum EQ in N*n* ad rectangulum AGB; ergo alternando erunt rectangula H*b* in ER, & EQ in N*n* inter ſe ut rectangula DGF & AGB, hoc eſt ut quadrata contingentium, vel ſemidiametrorum quibus ipſæ FG, AG vel ipſæ HE, EN ſunt parallelæ, (per Prop 18. 31. & 40.) & per caſum præcedentem rectangula *b*E in ER, & *n*E in EQ ſunt inter ſe in hac eadem ratione, ergo ſummæ vel differentiæ horum rectangulorum, hoc eſt, rectangula HER, QEN erunt inter ſe in hac eadem ratione.

Q. E. D.

Tenet etiam Propoſitio, quamvis in primo caſu recta *b*ER ducta ipſis AC, B*d* parallela, contingat ſectionem in E; tum enim coeuntibus punctis E, T, contactus E eſſet ad verticem diametri ſectionis MK, & rectangulum *b*ER vel TRE fit quadratum ex *b*E, vel ER; & ſimiliter in caſu ſecundo coeuntibus punctis D, F rectantangulum DGF fit quadratum ex contingente DG vel DS.

Cor. I.

Cor. I. Hinc, manentibus punctis A, B, D, C; puncto E per totam ſectionem, vel ſectionem oppoſitam tranſlato, rectiſque per id ductis ſervantibus priorem paralleliſmum rectis AB, AC, ratio rectangulorum HER, QEN, eadem ſemper manebit.

Cor. II. Vel manentibus punctis A, B, C, E & rectis per E ductis; puncto D (hoc eſt rectarum CD, BD interſectione) per ſectionem, vel ſectionem oppoſitam tranſlato, ratio rectangulorum HER, QEN eadem ſemper manebit, & ergo (quoniam data ſunt eorum latera ER, QE,) ratio rectarum HE, NE eadem ſemper manebit.

Fig. 52. Cor. III. Sectio conica non occurrit ſectioni conicæ vel ſectionibus oppoſitis in punctis pluribus quam quatuor. Nam ſi fieri poteſt, tranſeant duæ ſectiones conicæ per quinque puncta A, B, D, C, E, & (omnibus ſupra poſitis manentibus) per punctum B ducatur recta utraſque ſectiones ſecans in punctis *d*, P jungatur C*d* occurrens ipſi HE in *b*, & CP occurrens eidem HE in L; quoniam puncta *d*, D, ſunt in eadem ſectione per puncta A, B, C, E, tranſeunte, erunt rectæ *b*E, *n*E, inter ſe ut ipſæ HE, NE, (per Cor. præc.) & ſimiliter cum puncta P, D, ſunt in eadem ſectione per A, B, C, E tranſeunte, erunt etiam rectæ LE, *n*E, inter ſe ipſæ HE, NE, ergo æquales ſunt rectæ *b*E, LE, quod eſt abſurdum. Nam puncta *b* et L ſunt ad eaſdem partes puncti E; conſtat igitur Corollarium.

Fig. 54. Cor. IV. Si ſectioni conicæ poſitione datæ inſcribatur trapezium ABCD, cujus latera poſitione dantur; et a puncto quovis in ſectione E ducantur rectæ EF, EG, EH, EK, ad quatuor trapezii latera, datos cum ipſis angulos comprehendentes; erunt rectangula FEH, GEK, contenta rectis ad oppoſita latera ductis, ad ſe invicem in ratione data.

Nam a puncto E, ducantur rectæ EL, EO, parallelæ duobus trapezii lateribus adjacentibus ſciz. ipſis BC, BA; occurrantque lateribus oppoſitis in L, M et N, O punctis. Quoniam igitur in triangulo,

triangulo ELF, datus eſt ex Hypotheſi angulus LFE, et eſt angulus ELF æqualis angulo dato CBA, ſpecie dabitur triangulum ELF (per 40. Dat. Euclidis) ergo datur ratio FE ad EL; eodemque modo in triangulo EMH, dabitur ratio EH, ad EM; quare datur ratio ex hiſce compoſita, hoc eſt (per 23. 6.) ratio rectanguli FEH ad rectangulum LEM.

Eodem modo oſtendetur rationem rectanguli OEN ad rectangulum GEK, datam eſſe. Sed datur ratio rectanguli LEM ad rectangulum OEN (per Cor. 1.) ergo, quoniam oſtenſum eſt datam eſſe rationem rectanguli FEH ad ipſum LEM, et rationem ipſius LEM ad OEN, ipſiuſque OEN ad rectangulum GEK; dabitur (per 8. Dat. Euclidis) ratio rectanguli FEH, ad rectangulum GEK.

In propoſitione et hocce Corollario fuſius demonſtrantur omnes caſus Lemmatis 17. lib. 1. Phil. Nat. Princ. Math.

L SECTI-

M

J M

Sectio-
tur, de-
s, focis

II.

ı recta ei or-
proportionalis
m, ſive Para-

iametris con-
n, ſive Para-
lium.

Cor.

UNIV. OF MICH.

SECTIONUM CONICARUM

LIBER SECUNDUS.

De Affectionibus ex quibus ſingulæ Sectiones Conicæ ſua nomina ſortiuntur, deque ipſarum parametris, axibus, focis & deſcriptionibus in plano.

DEFINITIONES I, & II.

I. SI a puncto Parabolæ ducatur ad diametrum recta ei ordinatim applicata; recta, quæ eſt tertia proportionalis abſciſſæ et huic ordinatæ, dicitur *Latus rectum*, ſive *Parameter* iſtius diametri.

II. Recta, quæ eſt tertia proportionalis duabus diametris conjugatis Ellipſeos, aut Hyperbolæ, dicitur *Latus Rectum*, ſive *Parameter* iſtius diametri, quæ prima eſt trium proportionalium.

 COR.

Cor. I. Si a puncto Ellipſeos aut Hyperbolæ ducatur ad diametrum (quæ in Hyperbola eſt tranſverſa) recta ei ordinatim applicata; rectangulum contentum abſciſſis diametri inter vertices ejus, & ordinatam, erit ad quadratum ex ordinata, ut ipſa diameter ad ejus parametrum. Nam per Cor. 1. 31. & Def. 24. lib. 1. hocce rectangulum eſt ad quadratum ex ordinata, ut quadratum ex ipſa diametro ad quadratum ex ejus conjugata, hoc eſt, ut ipſa diameter ad ejus parametrum, per Def. præc. & Cor. 20. 6.

Cor. II. Si a puncto Hyperbolæ ducatur ad diametrum ſecundam recta ei ordinatim applicata; erit ſumma quadratorum ex ſemidiametro ſecunda, et ejus ſegmento inter centrum & ordinatam, ad quadratum ex ordinata, ut (quadratum ex iſta diametro ſecunda, ad quadratum ex diametro ipſi conjugata per Prop. 32. lib. 1. hoc eſt ut) ipſa diameter ſecunda ad ipſius parametrum per Def. præc. & Cor. 20. 6.

PROP. I.

Quadrata rectarum quæ diametro Parabolæ ordinatim applicantur æqualia ſunt rectangulis contentis diametri abſciſſis & ejus parametro.

Fig. 1. A Puncto Parabolæ B ducatur recta BG ordinatim applicata diametro FL cujus vertex eſt F, & ſit recta P tertia proportionalis abſciſſæ GF & ordinatæ BG, erit hæc parameter diametri FL per Def. 1. hujus, & erit quadratum ex BG æquale rectangulo GF in rectam P; ſi nunc ducatur quævis alia recta DL ordinatim applicata diametro FL, per Prop. 29. lib. 1. quadratum ex DL eſt ad quadratum ex BG, ut LF ad GF, hoc eſt, ut rectangulum LF in P, ad rectangulum GF in P; ergo quadratum ex DL eſt ad rectangulum LF in P, ut quadratum ex BG ad rectangulum GF in P, hoc eſt, in ratione æqualitatis. Et inde *Apollonius* hanc lineam *Parabolam* nominavit. *Q. E. D.*

Cor.

Cor. I. Si a puncto G in diametro FL Parabolæ ducatur recta GB parallela rectis ordinatim applicatis iſti diametro, & quadratum ex GB ſit æquale rectangulo contento abſciſſâ GF ſciz. inter ipſam GB, & verticem diametri F, & parametro ejuſdem diametri; erit punctum B in Parabola, ut patet.

Cor. II. Si recta AB Parabolâ terminata ordinatim applicetur diametro FL, & abſciſſa FG, inter ipſam & verticem diametri, ſit quarta pars parametri ejuſdem diametri FL; erit recta AB æqualis ipſi parametro. Nam per hanc propoſitionem AG ſciz. dimidium ipſius AB, erit media proportionalis inter parametrum & abſciſſam GF ſciz. quartam partem parametri; ergo AG, eſt dimidium ipſius parametri, & ergo AB eſt ipſi parametro æqualis.

PROP. II.

Si recta Parabolam contingens occurrat ipſius diametro, quadratum ex ſegmento inter contactum & diametrum erit æquale rectangulo contento ſegmento diametri inter verticem ejus & contingentem, & parametro diametri quæ per contactum tranſit.

CONTINGAT recta FR Parabolam in F, & occurrat diametro ED in R, & ducatur FG diameter per contactum, ſitque ejus parameter recta P; quadratum ex FR erit æquale rectangulo DR in P. Fig. 1.

Ducatur enim a vertice diametri ED recta DL ordinatim applicata diametro FG, erit parallela & æqualis contingenti FR, & abſciſſa ejus LF erit æqualis ipſi DR: ergo quoniam per præcedentem quadratum ex DL eſt æquale rectangulo LF in P, erit quadratum ex FR æquale rectangulo DR in P. *Q. E. D.*

PROP.

PROP. III.

Si recta ſecans Parabolam occurrat ipſius diametro; rectangulum contentum ejus ſegmentis inter diametrum & Parabolam, erit æquale rectangulo contento ſegmento diametri inter verticem ejus & ſecantem, & parametro diametri cui ipſa ſecans ordinatim applicatur.

Fig. I. SECET recta Parabolam in punctis A, B, & occurrat diametro ED in E, & ſit FG diameter cui AB ordinatim applicatur, ejuſque parameter P; erit rectangulum AEB æquale rectangulo ED in P.

Ducatur enim per verticem diametri FG recta Parabolam contingens, & occurrens diametro ED in R, erit parallela ſecanti AB (per Cor. 1. 25. lib. 1.) et ergo per Cor. 19. lib. 1. rectangulum AEB eſt ad quadratum ex FR, ut ED ad DR, ſive ut ED in P ad DR in P; ergo permutando, rectangulum AEB eſt ad rectangulum ED in P, ut quadratum ex FR ad rectangulum DR in P, hoc eſt, in ratione æqualitatis, per præcedentem.

Corollaria ad duas præcedentes.

Cor. I. Si duæ rectæ Parabolam contingentes ſibi invicem occurrant; quadrata ex earum ſegmentis inter contactus & occurſum; erunt ad ſe invicem ut parametri diametrorum, quæ per contactus tranſeunt. Nam (ductâ diametro per occurſum contingentium) quadratum ex alterutra contingente erit æquale rectangulo contento parametro diametri quæ per ejus contactum tranſit, & eâdem rectâ ſciz. ſegmento diametri inter ipſius verticem, & occurſum contingentium.

Cor. II. Et ſimiliter ſi duæ rectæ Parabolam ſecantes ſibi invicem occurrant; rectangula contenta ſegmentis ſecantium inter earum occurſum

occurſum, & Parabolam, erunt ad ſe invicem ut parametri diametrorum, quibus ipſæ ſecantes ordinatim applicantur, ut patet per Prop. præc.

Cor. III. Vel ſi recta Parabolam contingens occurrat ſecanti; patet ex duabus præcedentibus, quod quadratum ex ſegmento contingentis inter occurſum et contactum ejus, erit ad rectangulum contentum ſegmentis ſecantis inter occurſum & Parabolam, ut parameter diametri quæ per contactum tranſit ad parametrum diametri cui ipſa ſecans ordinatim applicatur.

Cor. IV. Quoniam rectangulum AEB contentum ſummâ & differentiâ ordinatarum BG, DL æquale eſt rectangulo contento parametro P & ED differentiâ abſciſſarum; erit parameter alicujus diametri ad ſummam duarum ordinatarum ut earum differentia ad differentiam abſciſſarum.

PROP. IV.

Si a puncto Ellipſeos ducatur ad diametrum AB recta FG ei ordinatim applicata; erit quadratum ex ordinata æquale rectangulo contento unâ abſciſſâ GB & parte parametri diametri AB, quæ eſt ad totum, ut altera abciſſa AG ad diametrum AB. Fig. 2.

A Diametri vertice B ducatur recta BH diametro perpendicularis, ipſiuſque parametro æqualis; jungatur AH & a puncto G ducatur recta parallela ipſi BH, occurrens ipſi AH in K, & compleatur rectangulum BGKL; erit quadratum ex FG huic rectangulo æquale.

Nam per Cor. 1. ad Def. 2. rectangulum AGB eſt ad quadratum ex FG, ut diameter AB ad parametrum ejus BH, ſive propter parallelas, ut AG ad KG, hoc eſt, ut idem rectangulum AGB ad rectangulum KGB: ergo quadratum ex FG eſt æquale rectangulo KGB

KGB contento abſciſſâ GB, & rectâ KG quæ eſt ad parametrum BK, ut altera abſciſſa AG ad diametrum AB.

Cor. Compleantur rectangula KLHM, ABHN, & manifeſtum eſt, quod quadratum ex ordinata FG deficit a rectangulo GH contento abſciſſâ GB et parametro diametri AB, figurâ KH ſimili & ſimiliter poſitâ ipſi AH, quæ continetur diametro AB ejuſque parametro BH. Propter hunc defectum *Apollonius* hanc lineam *Ellipſim* nominavit.

PROP. V.

Fig. 3. Si a puncto Hyperbolæ ducatur ad diametrum tranverſam AB, recta FG ei ordinatim applicata; erit quadratum ex ordinata æquale rectangulo contento abſciſſâ minori GB, & rectâ quæ eſt ad parametrum diametri AB, ut altera abſciſſa AG ad ipſam diametrum AB.

A Diametri vertice B ducatur recta BH diametro perpendicularis, ejuſque parametro æqualis; jungatur AH, & a puncto G ducatur recta parallela ipſi BH, occurrens ipſi AH, in K, & compleatur rectangulum KGBL; erit quadratum ex FG huic rectangulo æquale.

Nam per Cor. 1. ad Def. 2. rectangulum AGB eſt ad quadratum ex FG, ut diameter AB ad parametrum ejus BH, ſive propter parallelas, ut AG ad KG, hoc eſt, ut idem rectangulum AGB ad rectangulum KGB; ergo quadratum ex FG eſt æquale rectangulo KGB contento minori abſciſſâ GB, & recta KG quæ eſt ad parametrum BH, ut major abſciſſa AG ad diametrum AB: *Q. E. D.*

Cor. Compleantur rectangula KLHM, ABHN, & manifeſtum eſt, quod quadratum ex ordinata FG excedit rectangulum GH, contentum abſciſſâ GB & Parametro diametri AB, figurâ ſimili & ſimiliter

ſimiliter poſitâ ipſi AH quæ continetur diametro AB ejuſque Parametro BH. Propter hunc exceſſum, *Apollonius* hanc lineam *Hyperbolam* nominavit.

PROP. VI. PROBL. I.

Datâ poſitione Parabolâ, invenire axem ejus; & unicum eſſe axem oſtendere.

SIT Parabola FBL, inveniatur quævis diameter VO, & per punctum X infra verticem ejus ducatur recta ipſi VO perpendicularis, & Parabolæ occurrens in F, L; ſi recta FL bifariam ſecetur in X erit diameter VO axis per definitionem 22. lib. 1. Sed ſi non, ducatur alia diameter AB bifariam ſecans ipſam FL in E, erit hæc diameter axis, quia ordinatam FL ſecat ad angulos rectos, nam AB eſt parallela ipſi VO. Fig. 4.

Si vero duæ diametri eſſent axes, recta Parabolâ terminata & utrique perpendicularis, eſſet utrique ordinatim applicata, quod eſt abſurdum: ergo eſt unus axis tantum cujuſvis Parabolæ. *Q. E. D.*

PROP. VII. PROBL. II.

Datis poſitione & magnitudine duabus diametris conjugatis Ellipſeos aut Hyperbolæ; axes invenire, & duos tantum eſſe axes in utraque ſectione oſtendere.

SINT rectæ FL, GH, non ſibi invicem perpendiculares, diametri conjugatæ Ellipſeos aut Hyperbolæ, & centrum C; per F verticem diametri, quæ in Hyperbola eſt tranſverſa, ducatur recta FV ipſi GH parallela, & ab eodem F ſumatur in diametro FL ſegmentum FK (verſus centrum in Hyperbola, ad partes autem contrarias in Ellipſi) ita ut rectangulum CFK ſit æquale quadrato ex CG, & bifariam ſectâ CK in P, ducatur PQ ipſi KC perpendi- Fig. 5, 6.

 cularis,

cularis, occurrens rectæ FV in Q; tum centro Q deſcribatur circulus tranſiens per C & K, & occurrens rectæ FV in D, O punctis; erunt junctæ CD, CO axes.

Nam per Cor. 27. lib. 1. recta FV continget ſectionem cujus diametri conjugatæ ſunt FL, GH, & propter circulum, rectangulum DFO eſt æquale rectangulo CFK, hoc eſt, quadrato ex ſemidiametro CG (per conſtructionem) ergo CD, CO ſunt diametri conjugatæ (Cor. 51. lib. 1.) & ſe invicem ad angulos rectos ſecant, ob angulum DCO in ſemicirculo rectum, & proinde ſunt axes (Def. 22. lib. 1.) nam ordinatas ſuas ad angulos rectos ſecant: vertices axium hoc modo inveniuntur; a puncto F ducatur recta FE ad unum axem CD, & alteri parallela, & ſint CD, CB, CE proportionales & ſumatur CA æqualis ipſi CB, erunt B & A vertices axis CD per 48, 49. lib. 1. eodem modo inveniuntur M, N vertices alterius axis. *Q. E. I.*

Hiſce manentibus, ſi duæ aliæ diametri conjugatæ CX, CV eſſent axes: occurrant hæ contingenti FD, in X, V punctis; erit rectangulum XFV æquale quadrato ex CG (51. lib. 1.) hoc eſt, rectangulo CFK: ergo circulus deſcriptus per puncta C, K & X tranſibit etiam per V, & propter angulum XCV (per Hypotheſin) rectum, erit centrum hujuſce circuli in recta FXV, & propter rectam PQ perpendiculariter biſecantem ipſam CK, erit centrum in ipſa PQ: ergo eſt in puncto Q, hoc eſt, in centro circuli per puncta C, K, D, tranſeuntis; ergo duo circuli ſe invicem ſecantes in punctis C, K, idem habent centrum, quod eſt abſurdum: ergo duo tantum ſunt axes in utraque ſectione. *Q. E. D.*

Si in Hyperbola diametri FL, GH, eſſent æquales; punctum K coincideret cum puncto C, & circulus centro Q deſcriptus contingeret ipſam FL in C, & demonſtratio in hoc caſu eadem eſt, ac in præcedente, legendo quadratum ex FC pro rectangulo CFK.

Si datæ diametri conjugatæ ſint ſibi invicem perpendiculares, ipſæ erunt axes, ut patet.

COR.

Cor. I. Hinc, datâ poſitione Ellipſi, aut Hyperbolâ, inveniri poſſunt axes ejus, nam centrum invenitur per Cor. 7. 25. lib. 1. & diametri duæ conjugatæ per 27. lib. 1. & in Hyperbola magnitudo diametri ſecundæ determinatur per definitionem 24. lib. 1. Vel, ſectione poſitione datâ inventoque ejus centro, axes facilius inveniri poſſunt; ſi enim deſcribatur circulus, cujus centrum idem ſit cum centro ſectionis, occurrens ſectioni in duobus punctis, et jungantur puncta occurſus, diameter ſectionis hanc jungentem bifariam ſecans erit axis, ut patet.

Cor. II. Manifeſtum eſt ex Cor. 8. 25. lib. 1. quod recta per verticem axis ſectionis conicæ ducta, & ipſi perpendicularis, ſectionem contingit; & contra, ſectionem contingens in vertice axis eſt axi perpendicularis.

PROP. VIII.

Axes Ellipſeos ſunt inæquales; & eorum major eſt maxima, & eorum minor minima, omnium diametrorum Ellipſeos; & axes Hyperbolæ ſunt minimæ omnium ejus diametrorum.

Pars 1. SIT Ellipſis cujus axes ſint AB, MN, erunt inæquales per Cor. 2. 31. lib. 1. Sit eorum major AB, qui axis tranſverſus dicitur, & minor MN qui axis conjugatus ſive ſecundus dicitur; quævis ſemidiameter CF erit minor ipſâ CB, major vero ipſâ CM; ducatur enim FE ordinata ad ipſam AB, & propter angulum CEF rectum, quadratum ex CF eſt æquale quadratis ex CE, FE ſimul: ſed quadratum ex FE minus eſt rectangulo AEB, nam eſt ad iſtud rectangulum, ut quadratum ex CM ad quadratum ex CB (Cor 1. 31. lib. 1.) ergo quadratum ex CF eſt minus quadrato ex CE & rectangulo AEB ſimul, hoc eſt, quadrato ex CB (5. 2.) ergo erit ipſa CF minor ipſâ CB, & ductâ ordinatâ FL ad FIG. 7.

 axem

axem MN, eodem modo oſtendetur ſemidiametrum CF, majorem eſſe ipſâ CM.

FIG. 6. *Pars.* 2. A vertice diametri CF Hyperbolæ, ducatur ad axem tranſverſum AB recta FE ei ordinatim applicata; & propter angulum FEC rectum, erit ſemiaxis CB minor ipſâ CF; & ſimiliter erit ſemiaxis ſecundus CM, minor quâvis aliâ ſemidiametro ſecundâ, nam CM eſt axis tranſverſus Hyperbolæ ipſi FB conjugatæ.

Cor. I. Manifeſtum eſt, quod quo remotior quævis diameter Hyperbolæ ſit ab axe, eò major erit.

FIG. 7. Cor. II. Diameter CF Ellipſeos axi majori propior, major eſt diametro CP remotiore. Si enim CF, CP æquales eſſent, diameter bifariam ſecans jungentem FP, ipſam ad angulos rectos ſecaret, & proinde eſſet axis, contra præcedentem; & ſi CF minor eſſet ipſâ CP, circulus centro C, & intervallo CF deſcriptus ſecaret ipſam CP intra Ellipſim, ſed occurret axi minori extra Ellipſim, ergo occurret Ellipſi alicubi inter F, & M, puta in Q tum eſſent CF, CQ æquales & diameter biſecans jungentem FQ eſſet axis, ut prius (contra præc.) unde conſtat corollarium.

Cor. III. Hinc manifeſtum eſt, quod duæ diametri Ellipſeos aut Hyperbolæ, quæ ab eodem axe æqualiter diſtant, ſunt æquales, & contra.

FIG. 8. Cor. IV. Axes Hyperbolæ AB, MN, bifariam ſecant angulos, qui aſymptotis CY, CZ comprehenduntur. Ducatur enim per verticem axis AB, recta alteri axi parallela, hæc continget Hyperbolam; occurrat vero aſymptotis in punctis R, S, erunt RB, BS, æquales (36. lib. 1.) & cum anguli ad B ſunt recti, triangula RBC, SBC erunt æquiangula, & ergo anguli ad C ſunt æquales.

DEFI-

DEFINITIONES III, IV, V.

III. SI in axe Parabolæ ſumatur intra ſectionem punctum, cujus diſtantia a vertice axis ſit quarta pars ipſius parametri; punctum iſtud dicitur *Focus* Parabolæ.

IV. Si in AB axe tranſverſo Ellipſeos aut Hyperbolæ ſumantur duo puncta F, & O, intra Ellipſim, vel oppoſitas Hyperbolas, ita ut rectangulum AFB vel AOB ſit æquale quadrato quod fit ex ſemiaxe conjugato CM; hæc puncta F, & O dicuntur *Foci* Ellipſeos aut Hyperbolarum oppoſitarum. FIG. 9, 10.

V. Per focum ſectionis conicæ ducatur recta axi ordinatim applicata, & per punctum in quo occurrit ſectioni ducatur contingens, hæc dicitur *contingens Focalis.*

COR. I. Si centro M vertice axis conjugati Ellipſeos, & intervallo CA ſemiaxe tranſverſo, deſcribatur Circulus, ſecabit axem tranſverſum in focis. Nam occurrat ei in punctis F, O, & quadratum ex MF ſive CA æquale erit quadratis ex CF & CM ſimul, ſed quadratum ex CA eſt etiam æquale quadrato ex CF & rectangulo AFB ſimul (per 5. 2.) ergo rectangulum AFB eſt æquale quadrato ex CM, & proinde eſt F focus; & ſimiliter erit O alter focus. FIG. 9.

COR. II. Si a centro Hyperbolæ C, ſumatur in axe tranſverſo ſegmentum CF, vel CO æquale rectæ AM jungenti vertices axium, erit terminus ejus focus. Nam quadratum ex AM ſive CF eſt æquale quadratis ex CA & CM ſimul, & (per 6. 2.) idem quadratum ex CF eſt æquale quadrato ex CA & rectangulo AFB, ergo rectangulum AFB eſt æquale quadrato ex CM, & proinde eſt F focus; et ſimiliter erit O alter focus. FIG. 10.

COR. III. Patet quod foci Ellipſeos, aut Hyperbolarum oppoſitarum vel conjugatarum, æqualiter a centro diſtant.

PROP.

PROP. IX.

Fig. 9, 10, 11. Per focum F ſectionis conicæ RAP ducatur FT ordinatim applicata axi AB, & ducatur contingens focalis TD; ſi per verticem axis AB ducatur contingens, ejus ſegmentum inter contactum & contingentem focalem interjectum, erit æquale ſegmento axis AF inter eundem contactum & focum F.

Fig. 11. PRIMO ſit ſectio Parabola, & occurrat contingens focalis axi in D, & contingenti AH, per verticem axis ductæ, in H, erunt AH, AF æquales. Nam (per Prop. 47. lib. 1.) eſt AD dimidium ipſius FD, ergo erit AH dimidium ipſius FT; ſed FT eſt dimidium parametri axis (per Def. 3. & Cor. 2. 1. huj.) eſt igitur AH quarta pars ejuſdem parametri & proinde æqualis ipſi AF.

Fig. 9, 10. Secundo ſit ſectio Ellipſis aut Hyperbola, & occurrat contingens focalis axi AB in D, & contingentibus ductis per vertices axis AB in H & G; erunt AH, BG æquales ipſis AF, BF; erit enim rectangulum AH in BG, æquale quadrato ex ſemiaxe ſecundo CM per 50. lib. 1. hoc eſt rectangulo AFB (per Def. 4.) & per Cor. 5. 18. lib. 1. eſt AH ad BG, ut (HT, ad TG, ſive propter parallelas ut) AF ad FB: ergo hæc æqualia rectangula AH in BG, & AF in FB ſunt etiam ſimilia, & proinde latera homologa AH, AF & BG, BF æquantur. *Q. E. D.*

Cor. Manentibus jam poſitis, ſi a quovis puncto P ſectionis conicæ vel ſectionis oppoſitæ, ducatur recta ad focum F, & recta PQ ad axem AB ipſi perpendicularis, occurrens contingenti focali in L, & ſectioni iterum in R; quadratum ex FQ erit æquale rectangulo PLR. Nam quoniam contingens AH ſit parallela ſecanti LPR, erit quadratum ex AH ad rectangulum PLR,

PLR, ut (quadratum ex HT, ad quadratum ex TL (Cor. 6. 18. lib. 1.) ſive propter parallelas ut) quadratum ex AF ad quadratum ex FQ; ſed quadratum ex AH eſt æquale quadrato ex AF per hanc Propoſitionem: ergo rectangulum PLR eſt æquale quadrato ex FQ.

PROP. X.

Per focum F ſectionis conicæ RAP, ducatur FT ordinatim applicata axi AB, & ducatur contingens focalis TD, & a quovis puncto P, in hac ſectione vel ſectione oppoſita, ducatur recta ad focum F, & perpendicularis PQ ad axem AB, occurrens TD contingenti focali in L; erunt PF, LQ æquales. FIG. 9, 10, 11.

OCCURRAT recta PQ ſectioni iterum in R; quoniam angulus FQP eſt rectus, quadratum ex FP æquale eſt quadratis ex PQ, FQ, hoc eſt, (Cor. præc.) quadrato ex PQ una cum rectangulo PLR, hoc eſt, quadrato ex LQ (per 6. 2.) ergo recta FP æqualis eſt ipſi LQ. *Q. E. D.*

DEFINITIO VI.

OCCURRAT contingens focalis TH axi Parabolæ, vel axi tranſverſo Ellipſeos aut Hyperbolæ AB in puncto D, & per punctum D ducatur recta ipſi AB perpendicularis: hæc recta *Directrix* ſectionis conicæ dicitur. FIG. 9, 10, 11.

COR. I. Omnis recta directrici Parabolæ perpendicularis, eſt diameter, & contra, ut patet ex Cor. 4. ad Def. Sectionum lib. 1.

COR. II. Diſtantia directricis a vertice Parabolæ æqualis eſt diſtantiæ foci ab eodem vertice per Prop. 47. lib. 1.

COR.

Cor. III. In Ellipſi & Hyperbola ſemiaxis CA eſt media proportionalis inter CD, diſtantiam directricis a centro, et CF diſtantiam foci a centro, ut patet ex 48 & 49. lib. 1. patet etiam duas eſſe directrices in Ellipſi & Hyperbola, a centro æqualiter diſtantes.

PROP. XI.

Fig. 9, 10, 11. Si a quovis puncto P in ſectione conica RAP ducatur recta PE perpendicularis ad directricem DE, & recta PF ad focum huic directrici propiorem; recta PF ducta ad focum erit ad perpendicularem PE, ut FA diſtantia foci F a vertice propiore axis, ad DA diſtantiam directricis DE ab eodem vertice.

DUCANTUR enim per punctum P recta PQ ad axem AB ipſi perpendicularis, & occurrens contingenti focali DT in L, erit QD ſegmentum axis inter rectam PQ & directricem æquale ipſi PE, et erit LQ æqualis ipſi PF (per Prop. præced.) ducatur a vertice axis A contingens occurrens ipſi DT in H; quoniam igitur parallelæ ſunt AH, LQ, erit LQ ad QD, ut HA ad AD, hoc eſt, ut FA ad AD (9. huj.) ergo eſt PF ad PE ut FA ad AD. *Q. E. D.*

Cor. I. Hinc, in Ellipſi et Hyperbola, recta PF ducta ad focum eſt ad PE perpendicularem ad directricem, ut CF diſtantia foci a centro ad CA ſemiaxem tranſverſum. Nam per Cor. præc. CF eſt ad CA, ut CA ad CD, ergo convertendo eſt CF ad FA, ut CA ad AD, tum alternando eſt CF ad CA, ut FA ad AD, hoc eſt, ut PF ad PE, per Propoſitionem; ergo PF eſt ad PE, ut CF ad CA.

Cor. II. Ex demonſtratione præcedente eſt CF diſtantia foci a centro ad CA ſemiaxem, ut FA diſtantia foci a vertice propiore ad DA diſtantiam directricis ab eodem vertice.

Cor.

Cor. III. Rectæ a punctis in eadem ſectione vel oppoſitis ſectionibus ductæ ad focum, ſunt inter ſe ut perpendiculares ductæ ab iiſdem punctis ad directricem iſti foco propiorem.

SCHOLIUM.

SIT DAH triangulum rectangulum & in baſi ejus DA ultra angulum rectum A producta, ſumatur recta FA æqualis perpendiculo HA, & circa punctum F revolvatur recta FA, & augeatur eâ lege, ut ſit ſemper æqualis rectæ per terminum ejus ductæ parallelæ ipſi HA, & terminatæ ipſis DA, DH productis; linea deſcripta motu termini hujuſce rectæ revolventis, erit ſectio conica: ſciz. Hyperbola, Parabola, vel Ellipſis prout baſis trianguli DA ſit minor, æqualis, vel major perpendiculo HA; deinde puncto D interſectione baſis cum Hypothenuſa in infinitum abeunte Hypothenuſa ſit baſi parallela, & Ellipſis mutatur in Circulum cujus centrum eſt F; in cæteris caſibus punctum F erit focus ſectionis deſcriptæ, & punctum A vertex axis ejus; & cum recta revolvens ſit parallela ipſi HA, terminus ejus eſt in recta DH, quæ proinde ſectionem continget. Quæ omnia conſtant ex ſupra demonſtratis: unde etiam inveniri poſſunt punctum B alter terminus axis tranſverſi & centrum C, cum ſectio ſit Ellipſis aut Hyperbola. Fig. 9, 10, 11.

PROP. XII.

Recta a quovis puncto Parabolæ P ducta ad focum ejus F, eſt æqualis PE perpendiculari ductæ ab eodem puncto ad directricem. Fig. 11.

NAM, per præcedentem, eſt PF ad PE, ut FA ad AD, hoc eſt, in ratione æqualitatis per Cor. 2. ad Definitionem 6. hujus. *Q. E. D.*

Cor. I. Diſtantia puncti intra Parabolam a foco, eſt minor, & puncti extra Parabolam, eſt major perpendiculari ab eodem puncto ductâ ad directricem. Sit punctum M intra Parabolam, et ducatur MF ad focum et perpendicularis ad directricem ei occurrens

in E, et Parabolæ in P, jungatur PF, et quoniam MF minor eſt ipſis MP, PF, erit minor ipſis MP, PE, hoc eſt, ipſâ ME. Sit nunc punctum N extra Parabolam in recta PE perpendiculari ad directricem, et junctâ NF, erunt NF, NP ſimul majores ipſâ PF ſive PE; ergo NF major eſt ipſâ NE.

Cor. II. Hinc ſi diſtantia alicujus puncti a foco Parabolæ ſit æqualis, vel minor, vel major perpendiculari ab eodem puncto ad directricem ductâ, erit illud punctum in Parabola in primo caſu, intra ipſam in ſecundo, et extra ipſam in tertio caſu.

PROP. XIII.

Fig. 10. Si a puncto P in Hyperbola RAP ducatur ad focum ejus F recta PF, & recta PN ad directricem DE, foco F propiorem, aſymptoto CY parallela; erunt hæ ductæ PF, PN inter ſe æquales.

DUCATUR enim a puncto P recta PE ad directricem DE ei perpendicularis, et ſit alter focus O, per B verticem axis tranſverſi ducatur contingens occurrens aſymptoto CY in Y, erit BY æqualis ſemiaxi ſecundo CM, (38. lib. 1.) et erit CY æqualis ipſi CO diſtantiæ foci a centro (per Cor. 2. ad Def. 4) et per Cor. 1. 11. hujus, eſt PF ad PE, ut (CO ſive) CY ad CB; ſed propter æquiangula, triangula PEN, CBY, eſt PN ad PE, ut CY ad CB; ergo ipſæ PF, PN ſunt æquales. *Q. E. D.*

Cor. Oſtendi poteſt eodem prorſus modo ac in præcedente Corollario, quod diſtantia puncti intra Hyperbolam a foco ſit minor, et puncti extra Hyperbolam major, quam recta aſymptoto parallela ab eodem puncto ducta ad directricem huic foco propiorem; et proinde ſi diſtantia alicujus puncti a foco Hyperbolæ, ſit æqualis rectæ ab eodem puncto ductæ ad directricem huic foco propiorem et aſymptoto parallelæ, erit iſtud punctum in Hyperbola ad cujus focum recta ducta fuit.

PROP.

PROP. XIV.

Si a puncto Ellipſeos aut Hyperbolæ ducantur ad focos duæ rectæ; erit ipſarum ſumma in Ellipſi, & differentia in Hyperbola, æqualis axi tranſverſo.

SIT Ellipſis aut Hyperbola cujus axis tranſverſus eſt AB, & foci F, O, & directrices DE & ZX; per punctum in ipſa P ducantur PF, PO ad focos, & recta ipſi AB parallela occurrens directricibus DE, ZX in punctis E & X. Fig. 9, 10.

Per Cor. 1. Prop. 11. hujus eſt PF ad PE, ut CF ad CA, hoc eſt, ut CA ad CD (Cor. 3, Def. 6.) ſive, ut AB ad DZ; & ſimiliter eſt PO ad PX, ut AB ad DZ; ergo ſumma vel differentia antecedentium PF, PO eſt ad ſumman vel differentiam conſequentium PE, PX, ut AB ad DZ; ſed in Ellipſi ſumma & in Hyperbola differentia conſequentium PE, PX eſt æqualis ipſi DZ; ergo in Ellipſi ſumma & in Hyperbola differentia antecedentium ſciz. rectarum PF, PO æqualis eſt ipſi AB axi tranſverſo. *Q. E. D.*

Cor. I. Si a puncto extra Ellipſim ducantur duæ rectæ ad focos, erunt hæ ſimul majores axe tranſverſo: ſi vero ducantur a puncto intra Ellipſim erunt ſimul minores eodem axe, ut patet per 20, 1.

Cor. II. Et contra: ſi rectæ a puncto ad focos ductæ ſint ſimul æquales, majores, vel minores axe tranſverſo; erit punctum illud in Ellipſi in primo caſu, extra ipſam in ſecundo, & intra ipſam in tertio caſu.

Cor. III. Si a puncto M intra Hyperbolam LAP ducantur ad focos rectæ MF, MO; erit ipſarum exceſſus major axe tranſverſo AB: ſi vero ducantur a puncto N extra Hyperbolam, erit ipſarum exceſſus minor eodem axe. Nam ſit M intra Hyperbolam, cujus focus ſit F, & occurrat huic Hyperbolæ in L recta MO ad Fig. 12.

focum O ducta, & jungatur LF, erit exceſſus rectæ MO ſupra MF major exceſſu ejus ſupra LM, LF ſimul, hoc eſt, exceſſu rectæ LO ſupra LF, hoc eſt, axe tranſverſo per hanc propoſitionem.

Sit nunc punctum N extra Hyperbolam, & a puncto L in quo recta NF Hyperbolæ occurrit, ducatur recta ad focum O, erit NO minor ipſis NL, LO; exceſſus igitur ipſius NO ſupra NF minor eſt exceſſu ipſarum NL, LO ſupra eandem NF, hoc eſt, exceſſu rectæ LO ſupra LF, hoc eſt, axe tranſverſo AB.

Cor. IV. Et contra ſi exceſſus rectarum, quæ a puncto aliquo ad focos Hyperbolarum ducuntur, fuerit æqualis, vel major, vel minor axe tranſverſo, erit punctum hoc in alterutra Hyperbola, vel intra, vel extra Hyperbolam.

SCHOLIUM.

CUM harum linearum quæ ſectionum directrices vocantur originem ex natura ipſius coni deducere conatus ſim, in theorema quoddam incidi, quod haud inconcinnum videbatur, & fini propoſito aliquatenus inſervire poteſt; id vero ſub finem hujuſce libri inſerui, ne ſeriem propoſitionum interrumpat.

PROP. XV.

Fig. 13. Si a puncto Parabolæ P ducatur ad focum recta PF, & perpendicularis PE ad directricem; recta PT bifariam ſecans angulum FPE, his ductis comprehenſum, Parabolam continget: et contra recta PT Parabolam contingens in P, bifariam ſecabit angulum rectis PF, PE comprehenſum.

Pars 1. SUMATUR enim in recta PT quodvis punctum X, & ducantur rectæ XF, XE & EF, & ducatur XD perpendicularis ad directricem: quoniam igitur in triangulis PTF, PTE

I
&
id
D
s;

m
u-
er
ns

F, Fig. 14.
e-
s,
T
E,
to

es,
&
m
uis
&
nt
E,
go
ta

e-

P.

UNIV. OF MICH.

I

fc
rr
ſt

re
n
e:
L

a
n
v

q
p
n

FIG. 13. S

]

PTE æquales ſunt PF, PE (12. huj.) communis autem PT, & æquales anguli TPF, TPE; æquales erunt TF, TE, & anguli ad T recti, ideoque XF æqualis eſt ipſi XE, & proinde major ipſà XD (19, 1.) ergo punctum X eſt extra Parabolam per Cor. 2, 12. hujus; & ergo recta PT contingit Parabolam in P.

Pars 2. Si nunc recta PT Parabolam contingat in P, biſariam ſecabit angulum FPE. Nam ſi non, ducatur alia recta hunc angulum biſariam ſecans, hæc quoque Parabolam continget in P, per caſum primum, quod fieri nequit (per 16. lib. 1.) ergo contingens PT biſariam ſecat angulum FPE. *Q. E. D.*

PROP. XVI.

Si a puncto Ellipſeos P ducantur ad focos duæ rectæ PF, PO; recta PT biſariam ſecans angulum FPE, qui deinceps eſt angulo FPO comprehenſo ductis ad focos, Ellipſim in puncto P continget: & contra ſi recta PT Ellipſim contingat in P, biſariam ſecabit angulum FPE, qui deinceps eſt angulo FPO comprehenſo rectis a puncto P ad focos ductis. Fig. 14.

Pars 1. PRODUCATUR OP ad E, ita ut PE, PF ſint æquales, & ſumatur in recta PT quodvis punctum X, & ducantur XO, XF, XE, & FE quæ occurrat ipſi PT in T, quoniam igitur in triangulis PTF, PTE æquales ſunt PF, PE, communis autem PT & anguli TPF, TPE æquales, erunt TF, TE æquales, & anguli ad T recti, quare æquales erunt XF, XE; ſed XO, XE ſunt ſimul majores ipſà OE; ergo XO, XF erunt ſimul majores ipſà OE, hoc eſt, ipſis OP, PF, hoc eſt, axe tranſverſo Ellipſeos (14. huj.) ergo punctum X eſt extra Ellipſim (per Cor. 2, 14. huj.) & proinde recta PT Ellipſim in puncto P contingit. *Q. E. D.*

Pars 2. Demonſtratur iiſdem verbis ac pars ſecunda præcedentis.

PROP.

PROP. XVII.

Fig. 12. Si a puncto Hyperbolæ P ducantur ad focos duæ rectæ PF, PO; recta PT bifariam ſecans angulum FPO his ductis comprehenſum, Hyperbolam in puncto P continget: & contra, ſi recta PT Hyperbolam in P contingat, bifariam ſecabit angulum EPO comprehenſum rectis a puncto P ad focos ductis.

Pars 1. SUMATUR enim in recta majore PO, recta PE æqualis ipſi PF, erit EO æqualis axi tranſverſo (14. huj.) jungatur FE quæ occurrat ipſi PT in T, & ſumatur in recta PT punctum quodvis X, & ducantur XO, XF, XE, &, ut in præcedente, erunt XE, XF æquales; & quoniam XO ſit minor ipſis XE, EO, ejus exceſſus ſupra XF erit minor exceſſu ipſarum XE, EO ſupra XF, hoc eſt, minor ipſâ EO, quæ æqualis eſt axi tranſverſo; & proinde punctum X eſt extra Hyperbolam (Cor. 4, 14. huj.) ergo recta PT Hyperbolam in puncto P contingit.

Pars 2. Demonſtratur iiſdem verbis, ac pars ſecunda propoſitionis 15. *Q. E. D.*

SCHOLIUM.

FOCI Ellipſeos & Hyperbolæ dicuntur a Veteribus puncta ex comparatione facta, de foco autem Parabolæ tacuit Apollonius; a Recentioribus hæc puncta Umbilici & Foci dicuntur, fortaſſe ex eo quod radii lucis, in ſpecula concava revolutione ſectionum conicarum generata incidentes, in his punctis colligi poſſunt. Nam ſi radii lucis incidant in ſpeculum Parabolicum, & ſint axi ejus parallelæ, poſt reflectionem coibunt omnes in foco; & ſi incidant in ſpeculum Ellipticum a uno foco devergentes, in altero poſt reflectionem coibunt; & ſi incidant in ſpeculum Hyperbolicum convergentes

gentes ad focum Hyperbolæ, quæ oppoſita eſt Hyperbolæ generanti, in foco ſpeculi poſt reflectionem coibunt.

Hæc omnia patent ex tribus propoſitionibus præcedentibus, et ex eo quod angulus reflectionis eſt æqualis angulo incidentiæ.

PROP. XVIII

Per terminos axis tranſverſi Ellipſeos aut Hyperbolæ AB, ducantur duæ contingentes, quæ occurrant cuivis alii contingenti PT in punctis H et G; circulus circa diametrum GH deſcriptus tranſibit per focos ſectionis F & O. Fig. 15, 16.

SIT enim CM ſemiaxis conjugatus, et quoniam parallelæ ſunt contingentes AH, BG et occurrunt tertiæ contingenti in H et G, erit rectangulum AH in BG æquale quadrato ex CM (per 50. lib. 1.) hoc eſt, rectangulo AFB (per Def. 4. hujus) ergo eſt AH ad AF, ut FB ad BG, et hæ rectæ ſunt circa æquales angulos FAH, FBG, æquiangula ſunt igitur triangula FAH, FBG (6. 6) igitur æquales ſunt anguli FHA, BFG; anguli vero FHA, HFA conficiunt rectum (quia rectus eſt angulus FAH) ergo anguli BFG, HFA conficiunt rectum; ideoque rectus eſt angulus GFH, et proinde eſt punctum F ad peripheriam circuli circa GH deſcripti (Converſ. 31. 3.) ſimiliter oſtendetur alterum focum O eſſe ad peripheriam ejuſdem circuli. *Q. E. D.*

PROP. XIX.

Si a puncto Ellipſeos aut Hyperbolæ P ducantur ad focos duæ rectæ PF, PO; continebunt rectangulum æquale quadrato ex ſemidiametro CD quæ parallela eſt contingenti per punctum P ductæ. Fig. 15, 16.

DUCATUR enim per terminos axis tranſverſi contingentes AH, BG, quæ occurrant contingenti per P ductæ in H, G; per præcedentem circulus circa diametrum GH deſcriptus tranſibit

per

per focos; ab utrovis foco ut F ducatur ad GH perpendicularis FT, occurratque ipſi OP in E; et quoniam æquales ſunt anguli FPT, EPT, (par. 2. Prop. 16, 17. huj.) et communis PT, erit FT æqualis ipſi TE et PF ipſi PE; igitur circuli diameter GH bifariam et perpendiculariter ſecat ipſam FE, et eſt punctum F in ipſius circumferentia, ergo eſt punctum E in eadem; et proinde propter circulum eſt rectangulum OPE, hoc eſt, OPF æquale rectangulo GPH, hoc eſt, quadrato ex ſemidiametro CD ipſi GH parallela (per par. 2. Prop. 50. lib. 1.) *Q. E. D.*

PROP. XX.

Fig. 15, 16. Si a focis Ellipſeos aut Hyperbolæ F & O dimittantur ad quamvis contingentem GPH perpendiculares FT, OL; circulus circa axem tranſverſum deſcriptus tranſibit per puncta T et L in quibus ſciz. perpendiculares contingenti occurrunt.

SIT enim AB axis tranſverſus et centrum C, et a contactu P ducantur PF, PO ad focos, occurratque perpendicularis FT ipſi PO in E, et jungatur CT. Quoniam æquales ſunt anguli FPT, EPT (16, et 17. huj.) et communis PT, erit FP æqualis ipſi PE, ergo OE eſt æqualis axi tranſverſo (14. huj.) ſed æquales ſunt quoque FT, TE & etiam FC, CO (Cor. 3. Def. 5. huj.) ergo parallelæ ſunt OE, CT, et proinde quoniam CF eſt dimidium ipſius OF, erit CT dimidium ipſius OE, hoc eſt, dimidium axis tranſverſi AB: ergo punctum T eſt in circumferenti circuli circa AB deſcripti; et ſimiliter erit punctum L in eadem. *Q. E. D.*

PROP.

PROP. XXI.

Si a focis Ellipſeos aut Hyperbolæ F & O dimittantur ad quamvis contingentem GPH perpendiculares FT, OL; continebunt rectangulum æquale quadrato quod ex fit ſemiaxe ſecundo. FIG. 15, 16.

SIT enim AB axis tranſverſus, & centrum C, & jungatur CT quæ occurrat ipſi OL in N, propter parallelas ON, FT erunt triangula CFT, CON æquiangula, & proinde propter æquales CF, CO, erunt etiam CT, CN & ON, FT æquales; circulus autem deſcriptus circa axem AB tranſibit per puncta T & L (per præc.) & propter æquales CT, CN, tranſibit quoque per N; & ergo, propter circulum, erit rectangulum LO in (ON ſive) TF æquale rectangulo BOA, hoc eſt, quadrato quod fit ex ſemiaxe ſecundo, per Def. 4. hujus. *Q. E. D.*

PROP. XXII.

Contingat Ellipſim aut Hyperbolam recta PT, & a contactu P ducatur PN ad axem tranſverſum contingenti perpendicularis, & a centro ducatur CK ad contingentem ei perpendicularis; hæ ductæ continebunt rectangulum æquale quadrato quod fit ex ſemiaxe ſecundo CM. FIG. 17, 18.

SINT Ellipſeos aut Hyperbolæ axes AB, M*m*, & centrum C. Ducantur a contactu P rectæ PE, PQ perpendiculares ad axes, erit QC ipſi PE æqualis; occurrat CM ipſi PT in R, & propter parallelas, erunt anguli NPE, RCK æquales, igitur triangula rectangula CKR, PEN ſimilia ſunt; ergo erit CK ad CR, ut PE ad PN, & proinde eſt rectangulum CK in PN æquale rectangulo CR

in (PE ſive) CQ. hoc eſt, quadrato ex ipſa CM (per 48, & 49. lib. 1.) *Q. E. D.*

PROP. XXIII.

FIG. 15, 16. Contingat recta PT Ellipſim aut Hyperbolam, & a contactu P ducatur ad focum recta PO, a centro vero ducatur CT ad contingentem ipſi PO parallela; erit CT æqualis dimidio axis tranſverſi AB.

DUCATUR enim PF ad alterum focum, & juncta FT productatur ut occurrat ipſi PO in E. Quoniam igitur parallelæ ſunt OE, CT, & æquales ſunt OC, CF, æquales erunt ET, TF, & quoniam contingens PT bifariam ſecat angulum FPE, erit FP ad PE, ut FT ad TE (per 3. 6.) æquales igitur ſunt FP, PE; ergo recta OE eſt ipſi AB æqualis per 14. hujus; quoniam vero CF eſt dimidium ipſius OF, erit CT dimidium ipſius OE ſive axis tranſverſi AB. *Q. E. D.*

PROP. XXIV.

FIG. 17, 18, 19. Contingat recta PT Ellipſim aut Hyperbolam, & a contactu P ducantur ad axem ſectionis duæ rectæ, una PE ei ordinatim applicata, & altera PN contingenti perpendicularis; erit CE ſegmentum axis inter centrum & ordinatam, ad NE ſegmentum ejuſdem inter ordinatam & rectam quæ contingenti eſt perpendicularis, ut axis ad ipſius parametrum.

OCCURRAT enim contingens PT axi ſectionis AB in D, & primum ſit AB alteruter axis Ellipſeos aut axis tranſverſus Hyperbolæ; eſt CE ad NE, ut rectangulum CED ad rectangulum

tangulum NED; eſt vero rectangulum CED æquale rectangulo BEA (Cor. 1. 49. lib. 1.) & propter angulum NPD rectum & PE ipſi AB perpendicularem, rectangulum NED æquale eſt quadrato ex PE; eſt igitur CE ad NE, ut rectangulum BEA ad quadratum ex PE, hoc eſt, ut axis AB ad ejus parametrum per Cor. 1. ad Def. 2. hujus.

Secundo, ſit AB axis ſecundus Hyperbolæ & (per Cor. 2. 49. lib. 1.) erit rectangulum CED æquale quadratis ex CE & CB, & ut prius, erit rectangulum NED æquale quadrato ex PE & erit CE ad NE, ut rectangulum CED ad rectangulum NED hoc eſt, ut quadrata ex CE & CB ad quadratum ex ordinata PE, hoc eſt, ut axis AB ad ipſius parametrum per Cor. 2. ad Def. 2. hujus. Fig. 19.

PROP. XXV.

Contingat recta PT Parabolam, occurratque ipſius axi AB in T, & a contactu P ducantur duæ rectæ ad axem, una PE ei ordinatim applicata, & altera PN contingenti perpendicularis; erit EN ſegmentum axis his ductis interceptum dimidium parametri axis: ſegmentum vero TN inter contingentem & perpendicularem PN, erit dimidium parametri diametri quæ per contactum P tranſit. Fig. 20.

DUCATUR enim per contactum P diameter DQ & per Propoſitionem 47. lib. 1. recta EA vel TA eſt dimidium ipſius TE.

Pars. 1. Quoniam igitur angulus NPT eſt rectus, & PE eſt ipſi TN perpendicularis, rectangulum TE in EN æquale eſt quadrato ex PE, hoc eſt, rectangulo contento AE in parametrum axis (1. huj.) ergo ut eſt TE ad AE, ita eſt parameter axis ad ip-

O 2 ſam

ſam EN, quæ eſt igitur dimidium iſtius parametri. Hujuſmodi ſegmentum axis EN, dicitur *Subnormalis*.

Pars 2. Propter rectangula triangula TPN, TEP ſimilia, erit rectangulum TE in TN æquale quadrato ex TP, hoc eſt, rectangulo contento TA in parametrum diametri DQ. (Prop. 2. huj.) eſt ergo ut TE ad TA, ita parameter diametri DQ ad ipſam TN, quæ eſt igitur dimidium iſtius parametri. *Q. E. D.*

Cor. I. Hinc, ſi a vertice P cujuſvis diametri QD ducatur recta PF ad focum, erit quarta pars parametri iſtius diametri. Nam, ductâ contingente PT, quoniam diameter DQ eſt perpendicularis ad directricem Parabolæ, erit angulus FPT æqualis angulo DPT (15. huj.) hoc eſt, angulo alterno FTP, ergo æquales ſunt FP, FT; ſi igitur centro F deſcribatur circulus per puncta T, P tranſibit etiam per N propter angulum TPN rectum; eſt igitur recta PF dimidium ipſius TN, & ergo eſt quarta pars parametri diametri DQ per partem 2. Propoſitionis.

Vide *Newt.* Princ. Math. Lem. 13. lib. 1.

Cor. 2. Et hinc, ſegmentum diametri inter verticem ejus & directricem eſt quarta pars ipſius parametri, ut patet ex (Cor. præc. & 12. huj.) ſi vero punctum P eſſet vertex axis conſtat utrumque Corollarium ex Definitione foci.

Cor. III. Hinc, ſi recta jungens vertices duarum diametrorum ſit axi ordinatim applicata, ipſarum parametri erunt æquales. Nam ipſarum ſegmenta inter vertices & directricem ſunt æqualia, utpote latera oppoſita parallelogrammi.

PROP.

PROP. XXVI.

Recta ſectione conicâ terminata per focum ejus tranſiens & axi ordinatim applicata, æqualis eſt parametro ipſius axis. Quævis recta vero Parabolâ terminata per focum tranſiens æqualis eſt parametro diametri, cui ipſa recta ordinatim applicatur.

Pars 1. PRIMUM ſit ſectio Ellipſis, aut Hyperbola, cujus axis tranſverſus eſt AB & axis ſecundus M*m*, et centrum C et focus F, et per F tranſeat recta XY ordinatim applicata axi tranſverſo AB, erit XY æqualis parametro ipſius AB. Fig. 17. 18.

Nam (per Cor. 1. 31. & Def. 24. lib. 1.) eſt quadratum ex CA ad quadratum ex CM, ut rectangulum BFA, hoc eſt, quadratum ex CM (Def. 4.) ad quadratum ex FY: ergo proportionales ſunt ipſæ CA, CM, FY; ergo totæ AB, M*m*, XY ſunt proportionales et proinde eſt ipſa XY parameter axis tranſverſi AB per Definitionem parametri. Secundo ſi ſectio ſit Parabola, ordinata ad axem, per focum tranſiens, eſt æqualis ipſius axis parametro per Cor. 2. 1. hujus & Def. foci.

Pars 2. Sit XY recta Parabolâ terminata per focum F tranſiens & ordinatim applicata diametro DQ, occurratque ei in O, per verticem P hujuſce diametri, ducatur PF ad focum, & PT Parabolam contingens erit hæc parallela ordinatæ OX; ergo angulus POF eſt æqualis angulo DPT, ſive angulo TPF (15. huj.) hoc eſt angulo alterno PFO; ergo abſciſſa PO æqualis eſt ipſi PF, hoc eſt, quartæ parti parametri diametri DQ per Cor. 1. præcedentis: eſt igitur recta XY æqualis parametro ipſius diametri DQ cui ordinatim applicatur, per Cor. 2. 1. hujus. Fig. 20.

Cor. Hinc, ſi a foco Hyperbolæ F ducatur ad ſectionem recta FL aſymptoto parallela, erit hæc quarta pars parametri axis tranſverſi. Fig. 18.

Ducatur

Ducatur a foco F recta FX axi ordinatim applicata, & Hyperbolæ occurrens in X, & ſit *dr* directrix Hyperbolæ, producatur FL ut occurrat directrici in *d* & ducatur X*r* ad directricem ipſi F*d* parallela; erit X*r* æqualis ipſi F*d* (34. 1.) & per Prop. 13. hujus, erunt FL, L*d* æquales, ut etiam FX, X*r*, ergo F*d* æqualis eſt ipſi FX, hoc eſt, dimidio parametri axis tranſverſi per partem 1. hujus; & ergo FL dimidium ipſius F*d* eſt quarta pars parametri axis tranſverſi Hyperbolæ.

PROP. XXVII.

Fig. 17, 18, 20. Si recta PT ſectionem conicam contingat, & a contactu P ducatur recta PF ad focum F, & PN contingenti perpendicularis occurrens axi AB, qui per focum tranſit, in N, a puncto vero N ducatur ad PF perpendicularis NV; abſcindet hæc ex PF ſegmentum VP æquale dimidio parametri axis AB.

Fig. 20. Cum ſectio ſit Parabola, ducatur ad axem perpendicularis PE; & quoniam oſtenſum eſt, in Cor. 1. 25. hujus, quod PF ſit ipſi NF æqualis, erit angulus FPN æqualis angulo FNP, quare æquiangula ſunt triangula rectangula PEN, NUP, & habent latus PN commune; æqualia ſunt igitur hæc triangula, ideoque eſt PV æqualis ipſi NE, hoc eſt, dimidio parametri axis (25. Prop. 1. hujus.)

Fig. 17, 18. Si vero ſectio ſit Ellipſis aut Hyperbola, ducatur a centro ad contingentem recta CK ipſi perpendicularis, & CT ipſi PF parallela, ſitque CM ſemiaxis ſecundus; & quoniam CK, CT parallelæ ſunt ipſis PN, PV, erunt anguli KCT, NPV æquales, ideoque æquiangula ſunt triangula rectangula CKT, NVP, quare rectangulum CT in PV eſt æquale rectangulo CK in NP, hoc eſt, quadrato ex CM (22. huj.) ergo proportionales ſunt CT, CM,

PV:

PV: eſt vero CT æqualis ipſi CA (per 23. huj.) & proinde PV eſt dimidium parametri axis AB per Definitionem parametri. *Q. E. D.*

PROP. XXVIII.

Si per focum Ellipſeos aut Hyperbolæ O ducatur recta occurrens ſectioni vel oppoſitis Hyperbolis in punctis H, I; erit diameter UZ, quæ ductæ eſt parallela, media proporportionalis inter HI, ſegmentum ductæ ſectione vel Hyperbolis interceptum, & axem tranſverſum AB. FIG. 17, 18. 21.

SIT centrum ſectionis C, & ducatur diameter bifariam ſecans ipſam HI in G, erit conjugata ipſi ZU (27. lib. 1.) per punctum H ducatur HS ad diametrum ZU ei ordinatim applicata erit hæc parallela ipſi CG (Cor. 27. lib. 1.) & ducatur contingens HT occurrens ipſi ZU in T; quoniam igitur CT ducta a centro ad contingentem eſt parallela ipſi HO jungenti contactum & focum, erit CT æqualis ipſi CA, eſt vero CS æqualis ipſi GH (34. 1.) ſed ſemidiameter CZ eſt media proportionalis inter ipſas CT, CS, (48. & 49. lib. 1.) hoc eſt, inter ipſas CA, GH, ergo tota diameter ZU eſt media proportionalis inter ipſas AB, HI. *Q. E. D.*

Cor. Hinc, rectæ Ellipſi aut Hyperbolâ utrinque terminatæ, & cum opus productæ per focum tranſeuntes, ſunt inter ſe ut quadrata ex diametris quibus ſunt parallelæ.

PROP.

PROP. XXIX.

Si rectæ lineæ ſectione conicâ, vel ſectionibus oppoſitis utrinque terminatæ tranſeant (cum opus productæ) per focum; rectangula contenta ipſarum ſegmentis ſciz. inter focum & ſectionem vel ſectiones, erunt inter ſe, ut ipſæ rectæ.

NAM ſi ſectio ſit Ellipſis aut Hyperbola, rectangula contenta ſegmentis rectarum ſunt inter ſe ut quadrata ex diametris quibus ipſæ rectæ ſunt parallelæ (31. & 40. lib. 1.) hoc eſt, ut ipſæ rectæ per Cor. præcedens.

Si ſectio ſit Parabola, rectangula contenta ſegmentis rectarum ſunt ut parametri diametrorum quibus rectæ ordinatim applicantur (Cor. 2. Prop. 3. huj.) hoc eſt, ut ipſæ rectæ per 26. hujus. *Q. E. D.*

PROP. XXX.

Si a foco Parabolæ ducatur ad quamvis contingentem recta ei perpendicularis; erit quadratum ex ducta æquale rectangulo contento diſtantiâ puncti contactus a foco, & diſtantiâ ejuſdem foci a vertice axis.

FIG. 13. SIT Parabola cujus axis eſt AB & focus F; per punctum in ipſa P ducatur contingens axi occurrens in N, recta PF ad focum, recta PB ordinata ad axem, & recta PE perpendicularis ad directricem; a foco ducatur ad contingentem recta FT ei perpendicularis & jungatur AT; quoniam angulus NPF æqualis eſt angulo NPE (per 15. huj.) hoc eſt, angulo alterno PNF, erunt rectæ FP, FN æquales; ergo perpendicularis FT bifariam ſecat ipſam PN in T; & ſegmentum BN bifariam ſecta eſt in vertice ejus

ejus A (per 47. lib. 1.) ergo recta TA parallela eſt ipſi PB & proinde axi perpendicularis, et igitur, propter angulum FTN rectum, quadratum ex FT eſt æquale rectangulo contento FA in FN ſive FP. *Q. E. D.*

Cor. Hinc quadrata ex perpendiculis, a foco Parabolæ in contingentes dimiſſis, ſunt inter ſe, ut diſtantiæ punctorum contactus a foco.

PROP. XXXI.

Si a foco Ellipſeos aut Hyperbolæ O, ducantur ad quamvis contingentem GPH, recta OL ei perpendicularis & recta OP ad contactum; erit OL ad OP, ut ſemiaxis ſecundus CM ad ſemidiametrum CD, quæ eſt ipſi contingenti parallela. Fig. 15, 16.

DUCANTUR enim ab altero foco F recta FT perpendicularis ad contingentem GP & recta FP ad contactum; quoniam (ex partibus ſecundis Prop. 16, & 17. huj.) anguli FPT, OPL ſunt æquales, triangula rectangula FTP, OLP ſunt ſimilia, ideoque rectangula OL in FT & OP in FP ſunt ſimilia: ergo quadratum ex OL eſt ad quadratum ex OP, ut rectangulum OL in FT ad rectangulum OP in FP, hoc eſt, ut quadratum ex CM ad quadratum ex CD, (per 21, & 19. huj.) ergo ipſa OL eſt ad OP, ut CM ad CD. *Q. E. D.*

Cor. I. Hinc, ſi a centro Ellipſeos aut Hyperbolæ C ducatur CK ad quamvis contingentem GH ei perpendicularis; erit CK ad ſemiaxem tranſverſum CA, ut ſemiaxis ſecundus CM ad ſemidiametrum CD quæ eſt ipſi contingenti parallela. Ducatur enim a foco recta OL perpendicularis ipſi GH, & OP ad punctum contactus, & a centro ducatur CT ad contingentem & ipſi OP

parallela; erit CT ipſi CA æqualis (23. huj.) tum propter æquiangula triangula KCT, LOP, erit CK ad CT ſive CA, ut OL ad OP, hoc eſt, ut CM ad CD, per hanc propoſitionem.

Cor. II. Quoniam in Ellipſi aut Hyperbola, quadratum ex FT eſt ad quadratum ex FP, ut quadratum ex CM ad quadratum ex CD, & datum eſt quadratum ex ſemiaxe ſecundo CM; erit quadratum ex FT ut $\frac{FPq.}{CDq.}$ hoc eſt (per 19. huj.) ut $\frac{FPq.}{FP \times OP}$ ſive ut $\frac{FP}{OP}$ ergo quadratum ex FT augetur in ratione in qua FP augetur et OP diminuitur, ſed in Ellipſi dum FP augetur, OP diminuitur & vice verſa: ergo in Ellipſi quadratum ex FT magis variatur quam in ratione ipſius FP; at in Hyperbola FP, OP ſimul augentur, vel diminuuntur: ergo in Hyperbola quadratum ex FT minus variatur, quam in ratione ipſius FP; & proinde ipſum perpendiculum FT a foco in contingentem dimiſſum, in Ellipſi magis, et in Hyperbola minus variatur quam in ſubduplicata ratione ipſius FP ſciz. diſtantiæ foci F a puncto contactus P.

Vide *Newt.* Prin. Math. Cor. 6. Prop. 16. lib. 1.

PROP. XXXII.

Fig. 22. Sit Ellipſis cujus axis tranſverſus eſt AB, & axis ſecundus MN, centrumque C; ſi a puncto D in axe ſecundo ponatur ad axem tranſverſum recta DG, æqualis ſummæ vel differentiæ ſemiaxium CA, CM, & in recta DG (producta ultra punctum G, cum ſit CG differentia ſemiaxium) ſumatur GP æqualis ipſi CM; erit punctum P in Ellipſi.

DUCATUR enim per punctum P recta PE ordinatim applicata axi AB, & a centro ducatur recta parallela ipſi DP occurrens PE productæ in F; propter parallelas CD, PF, erit CF æqualis

FIG. 14.

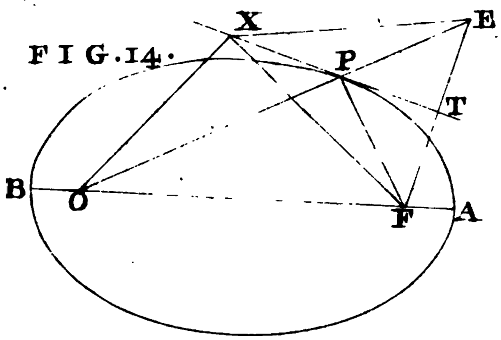
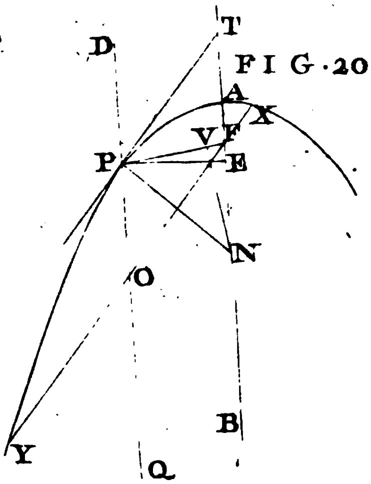


FIG. 20.



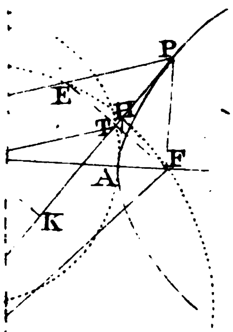


FIG. 17.

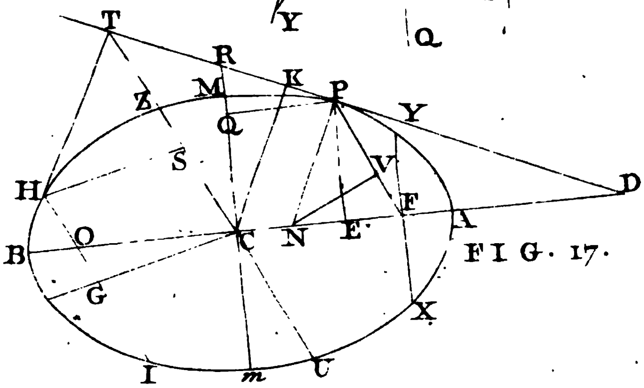
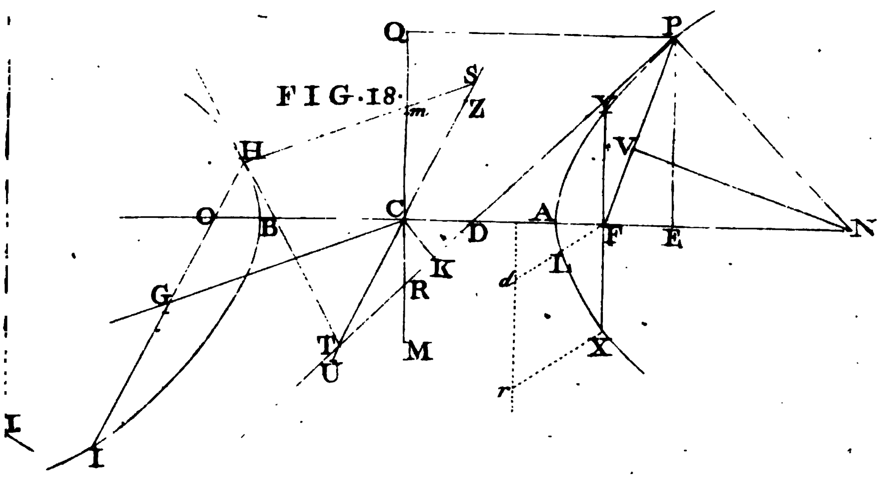


FIG. 18.



æqualis ipſi DP (34. 1.) hoc eſt, ipſi CA per conſtructionem; eſt ergo punctum F ad circumferentiam circuli circa AB deſcripti; quoniam igitur triangula PEG, FEC ſunt ſimilia, erit quadratum ex PE, ad (quadratum ex FE ſive) rectangulum BEA, ut quadratum ex (GP ſive) CM, ad quadratum ex (CF ſive) CA, eſt ergo punctum P in Ellipſi per Cor. 34. lib. 1. *Q. E. D.*

Cor. Hinc ſi duæ rectæ AB, MN ſe invicem ad angulos rectos bifariam ſecent in puncto C, & recta DG ſit æqualis differentiæ inter ipſas CA, CM, & GP (producta ultra punctum G quod eſt in recta majore AB) ſit æqualis ipſi CM, & recta DG ita moveatur per quatuor angulos rectos ut punctum D ſit ſemper in recta MN & G in ipſa AB; punctum P deſcribet Ellipſim cujus axis tranſverſus eſt recta AB & axis ſecundus recta MN. Et hinc Ellipſis deſcribitur ope inſtrumenti quod *Circinus Ellipticus* appellatur, ut cuivis ejus ſtructuram perſpicienti hinc facile patebit.

PROP. XXXIII. PROBL. III.

Datâ poſitione rectâ indefinitâ, & puncto in ea dato, & datâ rectâ ab ea bifariam ſectâ; deſcribere Parabolam cujus diameter ſit recta indefinita data, verticem habens punctum datum, & cui ordinatim applicata ſit recta data ab ea bifariam ſecta.

PRIMUM, ſit AB recta indefinita poſitione data bifariam et ad angulos rectos ſecans in puncto C rectam datam OS, & ſit A punctum in recta AB datum. Fig. 23.

Inveniatur recta QR, quæ tertia proportionalis ſit ipſis CA, CO, et a puncto A ſumatur in recta AB et verſus C ſegmentum AF æquale quartæ parti ipſius QR, & ſit AD in recta AB æqualis ipſi AF, & per punctum D ducatur recta indefinita DX ipſi AB perpendicularis; tum plano XDF imponatur norma HEG, ita ut

 latus

latus ejus HE applicetur rectæ DX & alterum latus EG ſit ad iſtas partes ipſius DX ad quas eſt punctum F, et extremitati G lateris EG annectatur extremitas fili GPF ejuſdem longitudinis cum latere EG, et figatur altera extremitas ejus in puncto F; adducatur pars fili GP ope paxilli P ad latus normæ EG, et juxta ipſum tendatur, deinde moveatur normæ latus HE ſecundum rectam DX, & interea filum paxillo diſtentum ſemper lateri normæ EG applicatum teneatur; linea motu paxilli P deſcripta erit Parabola deſcribenda.

Tranſeat enim Parabola per puncta O, A, S (per 33. lib. 1.) in qua ſit recta AB diameter et vertex ejus A, et cui ipſa OS ſit ordinatim applicata; erit diameter AB axis (per Def. 22. lib. 1.) et ejus parameter erit recta AF vel AD quater ſumpta, per conſtructionem et Def. 1. et proinde eſt punctum F focus et recta DX directrix hujuſce Parabolæ (per Def. 3. et Cor. 2. ad Def. 6.) quoniam igitur totum filum GPF ſit æquale lateri normæ EG, pars ejus PF, diſtantia ſciz. paxilli a foco Parabolæ, erit æqualis ipſi PE perpendiculari a paxillo ductæ ad directricem; movebitur ergo paxillum P ſemper in Parabola OAS (per Cor. 2. 12. hujus) et proinde motu ſuo ipſam deſcribet.

Secundo, ſit recta poſitione data VL bifariam ſecans in Y datam rectam MN, ſed non ad angulos rectos, et ſit V punctum in VL datum.

Inveniatur recta QR quæ tertia proportionalis ſit ipſis YV, YM et a puncto V ſumatur in recta VL ſegmentum VK quarta pars ipſius QR & ad partes puncti V contrarias iis ad quas eſt Y, et per V ducatur recta VT ipſi MN parallela, & recta VF æqualis ipſi VK faciens angulum TVF æqualem angulo TVK, per punctum K ducatur recta DX perpendicularis ipſi VL; tum in puncto F figatur una extremitas fili & ope paxilli et normæ deſcribatur Parabola, ut in caſu præcedente, cujus directrix ſit recta DX et focus F, erit hæc Parabola deſcribenda. Tranſibit enim per punctum V propter

æquales

æquales VF, VK (per Cor. 2. 12. huj.) & recta VL directrici perpendicularis erit diameter (Cor. 1. Def. 6.) & VK quater ſumpta erit ejus parameter (Cor. 2. 25. huj.) et recta VT ipſam continget (per 15. huj.) propter angulos TVF, TVK æquales, ideoque recta MN huic contingenti parallela ordinatim applicatur diametro VL, & propter quadratum ex YM vel YN, per conſtructionem, æquale rectangulo contento abſciſſâ YV & parametro diametri VL, erunt puncta M & N in hac Parabola per Cor. 1. 1. hujus. *Q. E. F.*

Cor. I. Hinc ſi detur poſitione directrix DX, & vertex axis ſciz. punctum A; deſcribi poterit Parabola, ducendo AD perpendicularem ad directricem & faciendo AF æqualem ipſi AD, erit enim F focus: ſimiliter ſi vertex A & focus F dentur; jungatur AF & producatur ad D, ut AD ſit æqualis ipſi AF, et perpendicularis ad DA per D ducta erit directrix. Si vero detur axis AB poſitione, ipſiuſque vertex A, & parameter QR, inveniatur focus ex ipſius definitione; ſimiliter dato poſitione axe & datis foco, & parametro axis, inveniri poterit directrix, igitur in his caſibus deſcribi poterit Parabola, ut in hac propoſitione.

Cor. II. Hinc etiam, ſi poſitione detur Parabolæ diameter VL, Fig. 24. ipſiuſque vertex V, et ſi parameter ejus ſciz. recta QR magnitudine detur, & punctum P in Parabola; deſcribi poterit Parabola. Sumatur enim in recta VL ſegmentum VK æquale quartæ parti ipſius QR, et per K ducatur recta KE ipſi VL perpendicularis; & per punctum P ducatur PE perpendicularis ad ipſam KE, tum centris V et P, intervallis VK et PE, deſcribantur circuli ſibi invicem occurrentes in duobus punctis F et G; ſi deſcribatur Parabola, cujus directrix eſt ipſa KE et focus punctum F vel G, tranſibit hæc per puncta V et P (Cor. 2. 12. huj.) et erit VL ipſius diameter (Cor. 1. ad Def. 6.) & erit VK quater ſumpta, hoc eſt, ipſa QR parameter iſtius diametri (Cor. 2. 25.) manifeſtum eſt, quod in hoc caſu duæ deſcribi poſſunt Parabolæ quæ Problemati ſatisfacient;

ſatisfacient; una vero tantum, ſi circuli jam deſcripti in unico puncto occurrant; ſi vero hi circuli non ſibi invicem occurrant, Problema in iſto caſu eſt impoſſibile.

PROP. XXXIV. PROBL. IV.

Datis poſitione & magnitudine duabus rectis ſe invicem bifariam ſecantibus, Ellipſim deſcribere in qua datæ rectæ ſint diametri conjugatæ.

Fig. 25. PRIMUM, ſint AB, MN datæ rectæ ſe invicem ad angulos rectos bifariam ſecantes in C; & quoniam in hoc caſu oportet rectas AB, MN eſſe inæquales (per Cor. 2. 31. lib. 1.) deſcribatur circulus, centro M termino minoris rectæ MN et intervallo CA dimidio majoris AB, ſecans ipſam AB in punctis F et O, & in ipſis F et O figantur extremitates fili ejuſdem longitudinis cum recta AB, et ope paxilli P tendatur filum et circumducatur paxillus P donec ad eum locum redeat a quo cœpit moveri; linea motu ejus deſcripta erit Ellipſis in qua rectæ AB, MN ſunt diametri conjugatæ.

Tranſeat enim Ellipſis per puncta A, M, B, N, in qua rectæ AB, MN ſunt diametri conjugatæ (per Prop. 34. lib. 1.) et quoniam hæ diametri conjugatæ ſe invicem ſecant ad angulos rectos, erit ipſarum major AB axis tranſverſus et minor MN axis ſecundus Ellipſeos; et erunt F et O ipſius foci, per conſtructionem et Cor. 1. ad Def. 5.

Quoniam igitur ſumma rectarum, quæ a paxillo P ad focos ducuntur, ſit ſemper æqualis ipſi AB, paxillum P dum circumducitur, erit in Ellipſi, per Cor. 2. 14. hujus, et proinde ipſam motu ſuo deſcribet.

Secundo, datæ ſint duæ rectæ ſe invicem, non ad angulos rectos, bifariam ſecantes. Manifeſtum eſt duas Ellipſes non habere poſſe idem centrum et duas diametros conjugatas poſitione et magnitudine

dine eaſdem, nam ſi poſſint omne punctum in una Ellipſi eſſet etiam in altera (per Cor. 34. lib. 1.) hoc eſt, ipſæ Ellipſes coinciderent; datis igitur duabus diametris conjugatis Ellipſeos poſitione et magnitudine, datur ipſa Ellipſis et proinde dantur axes ejus poſitione et magnitudine; his igitur inventis, per Prop. 7. hujus, ipſa Ellipſis deſcribi poteſt ut in caſu præcedente.

PROP. XXXV. PROBL: V.

Datis poſitione & magnitudine duabus rectis ſe invicem bifariam ſecantibus; Hyperbolas oppoſitas deſcribere quarum datæ rectæ ſint diametri conjugatæ.

SINT primum AB, MN datæ rectæ ſe invicem ad angulos rectos bifariam ſecantes in C, jungatur AM & a puncto C ſumantur utrinque in recta AB producta ſegmenta CF et CO æqualia ipſi AM; ad punctum O affixa ſit extremitas regulæ OG ut circa punctum hoc tanquam centrum libere circumagi poſſit; & alteri regulæ extremitati G annectatur extremitas fili cujus longitudinem regula OG excedit quantitate æquali rectæ AB, figatur altera extremitas fili in puncto F, & adducatur filum ope paxilli P ad latus regulæ OG, et juxta ipſum tendatur, deinde moveatur regula circa punctum O, et interea filum paxillo diſtentum ſemper regulæ applicatum teneatur; paxillus P motu ſuo deſcribet unam ex Hyperbolis oppoſitis quarum rectæ AB, MN ſunt diametri conjugatæ. FIG. 26.

Intelligantur enim Hyperbolæ oppoſitæ deſcribi (per 35. lib. 1.) quarum AB ſit diameter tranſverſa, & MN diameter ſecunda ei conjugata; erit punctum C centrum, et quoniam hæ diametri conjugatæ ſe invicem ad angulos rectos ſecant, erit AB axis tranſverſus, et MN axis ſecundus, et proinde erunt puncta F et O Hyperbolarum foci, per conſtructionem & Cor. 2. ad Def. 5. quoniam vero exceſſus regulæ GPO ſupra filum GPF ſit æqualis

ipſi

ipſi AB, erit exceſſus rectæ PO ſupra ipſam PF æqualis ipſi AB axi tranſverſo; ideoque dum regula movetur erit paxillus P in alterutra Hyperbolarum per Cor. 4. 14. hujus. Si vero ejuſdem regulæ extremitas, quæ in puncto O affixa fuit, jam in puncto F affigatur, & extremitas fili in puncto O figatur, et eadem, quæ prius, peragantur; deſcribetur Hyperbola oppoſita Hyperbolæ jam deſcriptæ, ut patet.

Secundo, ſi rectæ datæ ſe invicem non ad angulos rectos ſecent. Datis duabus diametris conjugatis Hyperbolæ poſitione & magnitudine, dantur ipſæ Hyperbolæ & ipſarum axes poſitione et magnitudine dantur ut in caſu ſecundo Prop. præc. ergo axibus inventis (per Prop. 7. huj.) ipſæ Hyperbolæ deſcribi poſſunt ut in caſu præcedente.

Cor. *Ad hanc & præcedentem propoſitionem.* Hinc ſi detur magnitudine & poſitione axis tranſverſus Ellipſeos aut Hyperbolæ AB, et foci ejus F et O; deſcribi poterit Ellipſis aut Hyperbola. Vel ſi detur diameter quævis AB poſitione & magnitudine, & recta PE quæ a dato in Ellipſi aut Hyperbola puncto P ordinatim applicatur diametro AB; deſcribi poterit Ellipſis aut Hyperbola; biſariam enim ſecetur AB in C, et per C ducatur recta parallela ipſi PE, in qua ſumantur æquales CM, CN, ita ut quadratum ex CA ſit ad quadratum ex CM vel CN, ut rectangulum AEB ſit ad quadratum ex PE; et ope præcedentium deſcribatur Ellipſis, aut Hyperbola, in qua rectæ AB, MN ſint diametri conjugatæ; tranſibit per punctum P, per Cor. 34. & 35. lib. 1.

PROP.

PROP. XXXVI. PROBL. VI.

Datis poſitione directrice & aſymptoto Hyperbolæ, & ejus foco huic directrici propiore dato; ipſam deſcribere.

SIT recta DX directrix Hyperbolæ, & F focus ejus iſti directrici propior, & ſit recta CY parallela uni ex ejus aſymptotis; plano in quo eſt Hyperbola imponatur norma ita ut latus ejus HE applicetur rectæ DX, et alterum latus EG ſit ad iſtas partes ipſius DX ad quas eſt F, & inclinetur latus normæ EG ad latus HE ut fiat ipſi CY parallelum; tum ope paxilli P et fili lateri EG applicati, cujus extremitas in puncto F affigitur, perficiantur omnia ut in Parabola deſcribenda Prop. 33. hujus; linea motu paxilli P deſcripta erit Hyperbola, cujus derectrix eſt recta DX, et aſymptotos parallela ipſi CY, et focus F. Nam quoniam filium GPF eſt æquale ipſi GPE, erit recta PF a paxillo ad focum ducta æqualis rectæ PE ab eodem paxillo ductæ ad directricem & aſymptoto parallelæ: & proinde paxillus P movetur in Hyperbola cujus directrix eſt recta DX & punctum F focus huic directrici propior, & cujus aſymtotos eſt ipſi CY parallela, per Cor. Prop. 13. hujus. Fig. 27.

Cor. Si planum ſuperficiem conicam ſecans, & ſectionem faciens Parabolam quam minimum inclinetur ita ut ſuperficiei oppoſitæ occurrat, ſectio ſtatim mutatur in Hyperbolam; eadem etiam ſimilitudo inter haſce ſectiones obſervari poteſt in ipſarum deſcriptionibus in plano; nam ſi latus normæ, cui filum applicatur in Parabola deſcribenda, ad alterum latus inclinetur, paxillus Hyperbolam deſcribet, & præterea, cum in his ſectionibus deſcribendis latus normæ per focum tranſit, pars fili PF inter focum et paxillum erit quarta pars parametri axis utriuſque ſectionis, ut conſtat ex Def. foci Parabolæ et ex Cor. Prop. 26. hujus.

PROP. XXXVII.

FIG. 28, 29, 30. Sit conus rectus GVH & in ejus ſuperficie ſit ſectio conica PAR, & ſit LNO circulus, ſectioni non occurrens, cujus diſtantia AL a vertice ſectionis eſt æqualis ipſi AF diſtantiæ ejuſdem verticis a foco F huic circulo propiore; dico quod interſectio plani hujuſce circuli cum plano ſectionis erit ipſius directrix; et quod PN, latus coni interceptum inter hunc circulum & quodvis punctum ſectionis P, erit æquale rectæ ab eodem puncto ductæ ad focum F circulo propiorem.

SECETUR conus per axem ejus VX plano GVH, perpendiculari ad planum ſectionis PAR, ipſum interſecante in recta AFB, erit hæc recta axis ſectionis, qui in Ellipſi aut Hyperbola erit tranſverſus, et proinde erunt vertex ſectionis A, focus F et recta AL in plano GVH; quoniam vero tam planum ſectionis PAR quam planum circuli LNO, eſt plano GVH perpendiculare, erit DE ipſorum interſectio perpendicularis ad planum GVH (19. 11.) et proinde ad axem ſectionis AB, et quia eadem DE eſt in plano circuli LNO erit plano baſis coni parallela; ſit recta DL interſectio plani GVH cum plano circuli LNO, erit hæc parallela plano baſis, ut patet.

FIG. 28. *Caſ.* 1. Primum, ſit ſectio PAR Parabola, et puncto in ipſa P ducatur recta PQ ad axem ei ordinatim applicata, hæc erit rectæ DE, et proinde plano baſis, parallela; per ipſam PQ tranſeat planum baſi parallelum interſecans planum GVH in recta GQH, quæ erit ipſi DL parallela (16. 11.) Quoniam igitur triangula GAQ DAL ſunt ſibi invicem et triangulo GVH ſimilia, et rectæ GV,

HV

HV ſunt æquales, quia conus eſt rectus, erunt GA, QA ut et DA, LA æquales, & proinde erit QD æqualis ipſi GL; ergo cum DA diſtantia rectæ DE a vertice Parabolæ ſit æqualis ipſi AL, hoc eſt, ipſi AF diſtantiæ foci a vertice, recta DE axi AB perpendicularis erit Parabolæ directrix, ergo conſtat prima pars Propoſitionis, cum ſectio eſt Parabola. Si igitur a puncto P ducatur recta PF ad focum, erit æqualis perpendiculari ductæ a P ad directricem (per 12. huj.) hoc eſt, ipſi QD ſive GL; ſed GL, PN æquantur, utpote ſegmenta laterum coni recti inter circulos parallelos intercepta; ergo PN æqualis eſt ipſi PF.

Caſ. 2. Secundo, ſit ſectio PAR Ellipſis & centrum ejus C, ducatur CP ſemiaxis ſecundus, erit rectæ DE, & proinde plano baſis, parallelus; per rectam CP tranſeat planum baſi parallelum interſecans planum GVH in recta MCK ipſi DL parallela (16. 11.) erit MK diameter circuli MPK, & propter circulum erit rectangulum MCK æquale quadrato ex CP ſemiaxe ſecundo; a vertice coni V ducatur recta ipſi AB parallela, occurrens GH baſis diametro productæ in S. Tum per Prop. 10. lib. 1. rectangulum ACB ſive quadratum ex CA eſt ad rectangulum MCK ſive quadratum ex CP, ut quadratum ex VS ad rectangulum HSG, ergo convertendo, quadratum ex CA eſt ad ejus exceſſum ſupra quadratum ex CP, hoc eſt, quadratum ex CF (Cor. 1. Def. 5. huj.) ut quadratum ex VS ad ejus exceſſum ſupra rectangulum HSG, hoc eſt, quadratum ex VH ſive VG; ſed (ob ſimilia triangula VSG, ACM) quadratum ex CA eſt ad quadratum ex AM, ut quadratum ex VS ad quadratum VG, ergo ipſæ rectæ CF & AM ſunt æquales, propter autem parallelas MC, DL, erit MA ſive CF, diſtantia foci a centro, ad ſemiaxem CA, ut LA ſive FA ad DA diſtantiam rectæ DE a vertice Ellipſeos A, ergo recta DE, cum ſit axi perpendicularis, erit directrix, per Cor. 2. 11. hujus, FIG. 29.

Q 2 ergo

ergo conſtat prima pars Propoſitionis cum ſectio eſt Ellipſis. Ducatur nunc a quovis puncto P in Ellipſi recta PC perpendicularis ad axem AB, & per PC tranſeat planum circuli occurrens lateribus VG, VH in M & K, & interſecans planum GVH in recta MK ipſi DL parallela, quoniam igitur CD eſt æqualis perpendiculari ductæ a P ad directricem DE, ſi ducatur PF ad focum, erit (per 11. huj.) PF ad CD, ut FA ſive LA ad DA: ſed ML eſt etiam ad CD, ut LA ad DA; ergo PF, ML æquantur, ſed ML, PN æquantur ut in caſu præcedente; ergo PN æqualis eſt ipſi PF.

FIG. 30. *Caſ.* 3. Tertio, ſit ſectio PAR Hyperbola & ſit recta PR interſectio plani ejus cum plano baſis HPG, erit hæc parallela ipſi DE 16. 11.) & proinde ordinatim applicata axi tranſverſo AB cui productæ occurrat in Q. ſit HQG interſectio plani HVG cum plano baſis, erit hæc parallela ipſi DL (16. 11.) a centro Hyperbolæ C ducatur recta, parallela ipſis HQG, DL, occurrens lateribus coni HV, GV in punctis K, M, & a vertice coni ducatur VS, axi Hyperbolæ AB parallela, occurrens ipſi HQG in S, & ſit CT ſemiaxis ſecundus Quoniam per Prop. 10. lib. 1. quadratum ex CA eſt ad rectangulum KCM, ut quadratum ex VS ad rectangulum HSG, & ſimiliter, in eadem ratione eſt rectangulum AQB (contentum abſciſſis) ad rectangulum HQG ſive quadratum ex ordinata PQ. erit rectangulum KCM æquale quadrato ex ſemiaxe ſecundo CT, per Def. 24. lib. 1. & proinde convertendo, quadratum ex CA eſt ad ſummam quadratorum ex CA, CT, hoc eſt, quadratum ex CF (Cor. 2. Def. 5. huj.) ut quadratum ex VS ad ſummam quadrati ex VS & rectanguli HSG, hoc eſt, quadratum ex VG; eſt autem (ob ſimilia triangula CAM, SVG) quadratum ex CA ad quadratum ex MA, ut quadratum ex VS ad quadratum ex VG, ergo ipſæ rectæ CF, MA ſunt æquales; propter autem parallelas MC, DL, erit CA ad MA ſive CF, ut DA ad LA ſive AF, eſt igitur recta DE directrix ſectionis (Cor. 2. 11. huj.) ergo conſtat in hoc caſu prima pars Propoſitionis.

Ducatur

Ducatur nunc a quovis puncto in Hyperbola recta PF ad focum & PQ perpendicularis ad axem Hyperbolæ AB, & per PQ agatur planum circuli GPHR, oſtendetur iiſdem verbis ac in caſu præcedente, quod recta PF ſit æqualis ipſi GL & proinde ipſi PN.

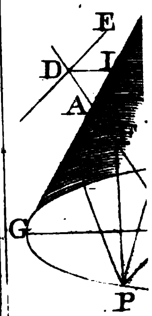
Q. E. D.

Cor. Cum Ellipſeos aut Hyperbolæ duo ſunt foci F & *f*, duo erunt circuli LNO, *lno* quales in Propoſitione deſcribuntur, quorum plana interſecabunt planum ſectionis in rectis DE, *de*, quæ erunt directrices ſectionis; & quoniam rectæ PF, P*f*, ad focos ductæ, ſunt æquales ipſis PN, P*n*, erit N*n* ſegmentum cujuſvis lateris coni inter circulos LNO, *lno* interceptum æquale axi tranſverſo ſectionis per Prop. 14. hujus.

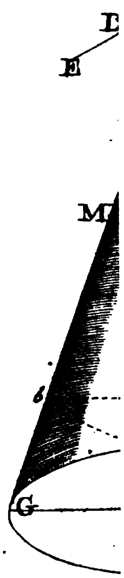
SECTI-

UNIV. OF MICH.

FIG·



FI



SECTIONUM

CONICARUM

LIBER TERTIUS.

De Parabola.

PROPOSITIO I.

Si Recta FG contingens Parabolam in F occurrat duabus diametris VC, DH in punctis G & R; quadrata ex FG, FR, ſegmentis contingentis inter contactum F & diametros, erunt ad ſe invicem ut GV, RD ſegmenta diametrorum inter ipſarum vertices & contingentem. Vel ſi recta AB ſecans Parabolam occurrat duabus diametris FL, VC in punctis K, E; rectangula AKB, AEB erunt ad ſe invicem, ut FK, VE ſegmenta diametrorum inter ipſarum vertices & ſecantem AB. FIG. 1.

Pars

Pars 1. SIT recta P parameter diametri quæ per contactum F tranſit, quadratum ex FG eſt æquale rectangulo GV in P, & quadratum ex FR eſt æquale rectangulo RD in P (per Prop. 2. lib. 2.) ergo quadrata ex FG & FR ſunt ad ſe invicem ut ſegmenta GV, RD.

Pars 2. Sit recta P parameter diametri, cui ipſa ſecans AB ordinatim applicatur; rectangulum AKB eſt æquale rectangulo FK in P, & rectangulum AEB eſt æquale rectangulo VE in P (3. lib. 2.) ergo rectangula AKB, AEB ſunt ad ſe invicem ut ſegmenta FK, VE. *Q. E. D.*

Cor. Occurrat recta Parabolæ in punctis A, B, & ſit F vertex diametri occurrentis rectæ AB in K; ſi a quovis alio puncto E ipſius AB ducatur recta EV parallela ipſi FK & quæ ſit ad FK, ut rectangulum AEB ad rectangulum AKB; erit punctum V in Parabola cujus diameter eſt FK, & quæ tranſit per puncta A, F, B. Cum punctum E ſit inter A & B, recta EV ducenda eſt ad iſtas partes rectæ AB ad quas eſt punctum F; ſecus ad contrarias.

PROP. II.

Si a verticibus duarum diametrorum ducantur ordinatim applicatæ ad ipſas diametros; abſciſſæ inter ordinatas & vertices diametrorum erunt inter ſe æquales.

Fig. 2. A Verticibus diametrorum FG, HM ducantur FL, HK ordinatim applicatæ ad diametros HM, FG; abſciſſæ HL, FK erunt æquales.

Ducatur enim a vertice diametri HM recta Parabolam contingens, occurrens diametro FG in A; propter parallelogrammum HAFL, abſciſſa HL eſt æqualis ipſi AF, hoc eſt, abſciſſæ FH; per Prop. 47. lib. 1. *Q. E. D.*

PROP.

PROP. III.

Si latus alicujus trianguli ſit diametris Parabolæ parallelum; quadrata ex reliquis lateribus erunt inter ſe ut parametri diametrorum quæ habent ordinatas ſuas iſtis lateribus parallelas.

SIT LMN triangulum cujus latus MN ſit parallelum diametris Parabolæ BFH, & ſint rectæ P & Q parametri diametrorum ED, FR quæ habent ordinatas ſuas BC, BR ipſis LM, LN parallelas; erit quadratum ex LM ad quadratum ex LN, ut P ad Q. FIG. 3.

Ducantur enim per E & F, vertices diametrorum ED, FR, rectæ EG, FG Parabolam contingentes, erunt parallelæ ipſis LM, LN (per hypoth. et Cor. 8. 25. lib. 1.) occurrat contingens EG diametro FR in A, & a contactu E ducatur EK ordinata ad diametrum FR erit parallela ipſi EG, & (per 47. lib. 1.) KF, FA erunt æquales, ergo æquales ſunt EG, GA. Quoniam igitur latera triangulorum LMN, GAF ſunt mutuo parallela, erunt iſta triangula æquiangula: ergo quadratum ex LM eſt ad quadratum ex LN, ut quadratum ex (GA ſive) GE ad quadratum ex GF, hoc eſt, ut recta P ad Q per Cor. 1. Prop. 3. lib. 2. *Q. E. D.*

COR. I. Si a quovis puncto Parabolæ B ducatur ad diametrum ED recta BC ei ordinatim applicata, & quævis alia recta BD; erit quadratum ex BD æquale rectangulo contento abſciſſa EC & parametro diametri FR cui recta ordinatim applicata eſt ipſi BD parallela. Sit recta Q parameter diametri FR & P parameter diametri ED; per hanc Propoſitionem quadratum ex BC eſt ad quadratum ex BD, ut (P ad Q ſive ut) P in EC ad Q in EC: ſed (per 1. lib. 2.) quadratum ex BC eſt æquale rectangulo P in EC: ergo quadratum ex BD æquale eſt rectangulo Q in EC.

Cor. II. Si recta OE contingat Parabolam & a puncto in ea O ducatur recta ſecans Parabolam in B, H punctis, & occurrens in D diametro ductæ per contactum E; quadratum ex ſegmento OD inter contingentem & diametrum erit æquale rectangulo BOH contento ſegmentis ſecantis inter contingentem & Parabolam. Nam per hanc Propoſitionem quadratum ex OD eſt ad quadratum ex OE, ut rectangulum BOH (per Cor. 3. 3. lib. 2.) ad quadratum ex eadem OE.

Cor. III. Parameter alicujus diametri Parabolæ eſt ad parametrum axis, ut quadratum radii ad quadratum ſinus anguli quem iſta diameter cum ſuis ordinatis comprehendit, ut patet ex hac Propoſitione, & ex eo quod quadrata laterum trianguli ſunt ut quadrata ſinuum angulorum oppoſitorum. Et proinde parametri diametrorum alicujus Parabolæ ſunt inter ſe reciproce, ut quadrata ſinuum angulorum quos ipſæ diametri cum ſuis ordinatis comprehendunt; ideoque parameter principalis, id eſt parameter axis, eſt minor quâvis aliâ parametro.

PROP. IV.

Si linea jungens terminos duarum ordinatarum occurrat diametro cui applicantur; pars diametri inter verticem ejus & rectam jungentem, erit media proportionalis inter abſciſſas.

Fig. 4. SINT rectæ EB, GD ordinatim applicatæ diametro Parabolæ AD, & ducatur recta jungens puncta E & G occurrens diametro AD in C; erit CA media proportionalis inter abſciſſas AB, AD.

Ducantur enim per puncta E et G duæ contingentes quæ occurrant diametro AD in H et F, erunt AH, AB æquales, ut etiam AF, AD, (47. lib. 1.) ſed conſtat (ex Prop. 54. lib. 1.) quod AC inter

inter verticem diametri et jungentem contactus EG eſt media inter AH et AF, ergo eſt media inter AB et AD. *Q. E. D.*

Cor. Hinc, ſi a puncto Parabolæ E ducantur duæ rectæ, una contingens, altera ipſam ſecans in punctis E et G, quæ occurrant diametro cuivis AL in H et C; erunt EC, CG ſegmenta ſecantis inter diametrum et Parabolam ad ſe invicem, ut AH, AC ſegmenta diametri inter verticem et contingentem, et verticem et ſecantem. Si enim EG ſit ordinatim applicata diametro AL, erit EG bifariam ſecta in C, & HC in A; ſi EG non ſit ordinatim applicata ipſi AL, a punctis E, G ducantur EB, GD ordinatim applicatæ diametro AL, et ob ſimilia triangula, eſt quadratum ex EC ad quadratum ex CG, ut quadratum ex EB ad quadratum ex GD, (hoc eſt, ut abciſſa AB ad abciſſam AD, ſive ob proportionales AB, AC, AD) ut quadratum ex AB ad quadratum ex AC; ergo erit ipſa EC ad CG, ut (AB ſive) AH ad AC.

PROP. V.

Sit recta HK ordinatim applicata diametro FB; per terminum ipſius HK ducatur diameter HC, & a vertice diametri FB ducatur recta Parabolæ iterum occurrens in O, & diametro HC in L, & ipſi HK in N; erunt FO, FL, FN proportionales. Fig. 5.

DUCANTUR enim a punctis O et L duæ rectæ OP et LS, ad diametrum FB parallellæ ordinatæ HK; erit OP ordinata ad diametrum FB, et LS erit ipſi HK æqualis; tum propter parallellas OP, LS, erit quadratum ex FO ad quadratum ex FL, ut quadratum ex OP ad (quadratum ex LS ſive) HK, hoc eſt, ut abſciſſa FP ad abſciſſam FK, vel (propter parallelas OP, HK) ut ipſa FO ad FN: ergo proportionales ſunt rectæ FO, FL, FN. *Q. E. D.*

SCHOLIUM.

Fig. 5. *SI duæ rectæ indefinitæ DE, CM, ſibi invicem in dato angulo occurrant in puncto H, & circa punctum quodvis F revolvatur recta indefinita occurrens rectis DE, CM in L, N punctis, & in recta revolvente ſumatur punctum O ad eaſdem partes puncti F ad quas eſt N (occurſus rectæ mobilis cum recta DE) ita ut FO, FL, FN ſint continuæ proportionales.* Locus *omnium punctorum O, erit Parabola tranſiens per F & H puncta, & in qua recta CM erit diameter & recta DE erit parallela ordinatim applicatis diametro quæ per punctum F tranſit. Si vero in hac recta revolvente ſumaretur FO media proportionalis inter ipſas FL, FN linea motu puncti O deſcripta eſſet Hyperbola. Vide* Schol. *poſt Prop.* 46. *lib.* 1.

PROP. VI.

Si tres rectæ Parabolam contingentes inter ſe conveniant; in eadem ratione ſecabuntur, ſciz. inter ipſarum occurſus & puncta contactus.

Fig. 6, 7. SIT ABC Parabola, quam rectæ AD, FE, DC contingunt in punctis A, B, C; erit ut AF ad FD, ita FB ad BE, et DE ad EC. Sit enim B punctum contactus poſitum in ſegmento Parabolæ inter reliqua puncta A et C; jungatur AC et biſariam dividatur in G, diameter per G ducta tranſibit per occurſum contingentium AD, CD, Cor. 1. 26. lib. 1.

6. *Caſ.* 1. Si diameter DG tranſeat per B, erit contingens FBE parallela ipſi AC et ergo in puncto B biſariam ſecabitur, et quoniam GB, BD ſunt æquales, contingentes AD, CD biſariam ſecabuntur in F et E, ob AC, FE parallelas.

7. *Caſ.* 2. Si vero diameter DG non tranſeat per B; junctis AB, BC, ducantur per puncta F, B, E diametri FHL, BN et EKM; et (per Cor. 1. 26. lib. 1.) æquales erunt AH, HB et proinde

inde AL, LN erunt æquales; pari ratione erunt NM, MC, æquales; ergo LM eſt æqualis (dimidio ipſius AC hoc eſt) ipſi GC, & proinde (demptâ communi GM) erit LG æqualis ipſi MC ſive NM, et ergo erit LN æqualis ipſi GM; his præmiſſis, erit AF ad FD, ut AL ad LG (2. 6.) hoc eſt, ut LN ad NM, ſive ut GM ad MC; ſed ut LN ad NM, ita eſt FB ad BE, & ut GM ad MC, ita eſt DE ad EC: ergo ut AF ad FD, ita eſt FB ad BE, & DE ad EC. *Q. E. D.*

PROP. VII. PROBL. I.

Datis poſitione directrice DX & foco F Parabolæ, & rectâ MN, diametris non parallelâ, poſitione datâ; huic parallelam ducere quæ Parabolam contingat. Fig. 8.

A FOCO F ducatur FO perpendicularis ad MN occurrens directrici in E, & bifariam ſectâ FE in T, ducatur TP ipſi MN parallela, quæ occurrat in puncto P perpendiculari ad directricem per E ductæ; & junctâ PF, erunt triangula PTE, PTF æqualia (4. 1.) & proinde cum FP ſit æqualis ipſi PE erit punctum P in Parabola (Cor. 2. 12. lib. 2.) & quoniam anguli EPT, FPT æquantur, recta PT ipſi MN parallela Parabolam continget. *Q. E. F.*

PROP. VIII. PROBL. II.

Parabolam deſcribere, quæ per data tria puncta tranſeat, & cujus diametri ſint parallelæ rectæ poſitione datæ, quæ non ſit parallela jungenti duo é punctis datis.

SINT B, G, F puncta data non in eadem recta, & ſit QR recta poſitione data; jungatur GF, & a puncto B ducatur recta ipſi QR parallela occurrens ipſi GF in E; ſi recta GF bifariam Fig. 9.

fariam ſecetur in E, Propoſitio eadem eſt cum Prop. 33. lib. 2. Si vero GF non bifariam ſecetur in E ſit bifariam ſecta in M, & ut rectangulum GEF ad rectangulum GMF, ita ſit recta BE ad rectam VM ductam per M & ipſi BE parallelam; tum per Prop. 33. lib. 2. deſcribatur Parabola cujus diameter ſit recta VM et ejus vertex V & cui recta GF ſit ordinatim applicata, tranſibit hæc Parabola per punctum B (per Cor. Prop. 1. huj.) & diametri ejus ſunt parallelæ rectæ QR per conſtructionem. Cum punctum E cadit inter G & F, recta VM ducenda eſt ad eas partes rectæ GF ad quas eſt punctum B ſecus ad contrarias. Cor. Prop. 1. hujus. *Q. E. F.*

PROP. IX. PROBL. III.

Datis in Parabola quatuor punctis; ipſam deſcribere.

FIG. 9. *Caſ.* 1. SINT puncta data A, B, G, F, & conficiant jungentes hæc puncta trapezium nulla habens latera parallela; occurrant duo latera oppoſita producta in D, & ut rectangulum BDA eſt ad rectangulum GDF, ita ſit quadratum ex DB ad quadratum ex DE ſegmento rectæ DGF; et junctâ BE, ope præcedentis deſcribatur Parabola per puncta G, B, F, cujus diametri ſunt parallelæ ipſi BE, tranſibit hæc per punctum A.

Quoniam enim rectangulum BDA & quadratum ex DB ſunt inæqualia; erunt etiam (ex conſtructione) rectangulum GDF & quadratum ex DE inæqualia; ergo recta DB non contingit Parabolam (ut patet ex Cor. 2. 3. huj.) ergo eam ſecat in alio puncto, & ſi non in A, puta in X; tum (per Cor. 2. Prop. 3. lib. 2.) rectangulum BDX eſt ad rectangulum GDF, ut quadratum ex DB ſe habet (per 3. huj.) ad quadratum ex DE, hoc eſt (per Conſtruc.) ut rectangulum BDA ad rectangulum GDF, ergo æquantur rectangula BDX, BDA, & proinde æquales ſunt ipſæ DA, DX, quod eſt abſurdum (nam punctum X eſt ad eas partes puncti D, ad quas

quas ſunt B et A quia D eſt extra Parabolam) ergo Parabola occurrit rectæ DB in puncto A. Quoniam ſegmentum DE ſumi poteſt in recta DGF ad alterutram partem puncti D, duæ Parabolæ deſcribi poſſunt quæ Problemati ſatisfacient.

Caſ. 2. Sint B, G, F, P quatuor puncta data, & ſint junctæ GF & BP parallelæ; recta MN has parallelas biſariam ſecans erit diameter Parabolæ tranſeuntis per hæc quatuor puncta (per Cor. 6. 25. lib. 1.) deſcribatur igitur Parabola per tria puncta B, G, F, cujus diametri ſint parallelæ rectæ MN et cum recta BN ſit ordinatim applicata diametro hujuſce Parabolæ, et PN æqualis ſit ipſi BN, tranſibit hæc Parabola per punctum P. Patet in hoc caſu, unicam eſſe poſitionem diametrorum Parabolæ quæ per hæc puncta tranſit, et proinde unicam Parabolam per hæc puncta tranſire poſſe.

Cor. Ex conſtructione hujus patet methodus inveniendi poſitionem diametrorum Parabolæ ex quatuor punctis in ipſa datis.

PROP. X.

Duæ Parabolæ, communem habentes axem & eandem parametrum principalem, in infinitum productæ ad ſe invicem ſemper propius accedunt, nunquam vero conveniunt.

SINT AEF, DCB duæ Parabolæ communem habentes axem EH, et ſit recta PQ utriuſque parameter principalis; ducatur recta axi ordinatim applicata ei occurrens in G et Parabolæ exteriori in punctis A, F & interiori in D. Quoniam quadratum ex AG æquale eſt rectangulo GE in PQ, & quadratum ex DG eſt æquale rectangulo GC in PQ, erit differentia horum quadratorum, hoc eſt rectangulum ADF (5. 2.) æquale, rectangulo CE in PQ; ergo, ob datum CE in PQ, rectangulum ADF erit ſemper ejuſdem magnitudinis, quò vero longius recedit punctum D a vertice Fig. 10.

a vertice C Parabolæ interioris, eò major erit recta DF, & proinde eò minor erit recta AD diſtantia inter Parabolas. Nunquam vero coibunt puncta A, D, ob rectangulum ADF magnitudine datum. *Q. E. D.*

Cor. Hinc, DH ſegmentum interceptum inter vertices duarum diametrorum coincidentium æquale eſt ſegmento EC inter vertices axium. Nam (per 3. lib. 2.) rectangulum ADF eſt æquale rectangulo PQ in DH, & per hanc Propoſitionem idem rectangulum ADF eſt æquale rectangulo PQ in EC, ergo æqualia ſunt ſegmenta DH, EC.

QUADRATURA PARABOLÆ.

PROP. XI.

Fig. 11. Si in Parabola inſcribatur recta BC & per B & C ducantur contingentes ſibi invicem occurrentes in A, & ſi biſecetur recta BC in G & ejus partes iterum biſecentur & ſic deinceps, & per omnia biſecantia puncta, ut D, E, V, G &c. ducantur diametri occurrentes Parabolæ in L, M, N, O &c. & ſi jungantur omnia hæc puncta B, L, M, N, O &c. rectis quæ conficiant figuram inſcriptam, & per eadem puncta B, L, M, N, O &c. ducantur contingentes, quæ conficiant figuram circumſcriptam; erit ſemper figura inſcripta dupla areæ quæ eſt intra triangulum BAC & extra figuram circumſcriptam.

NAM

igura
ı erit
t per
juales
C eſt
r EM
prop-
ınguli
lditur
dein-
rcum-
, ejus
ıſcrip-
uram.
. E. D.

nulla
areæ
AC.
nulla
extra
bolici

ıbolâ FIG. 11.
præ-
uovis
gura
ex-
tra

I 3

a ve
inde
vero
datu

C
rum
verti
æqu
recta
ſunt

Fig. 11. Si i
co
re
d,
&
&
re
pı
ço
ſc
tr

NAM ſit primo figura inſcripta triangulum BOC, erit figura circumſcripta trapezium BHZC, et area extra eam erit triangulum HAZ; et quoniam GO eſt diameter, tranſibit per punctum A, (Cor. 1. 26. lib. 1.) et propter GO, OA æquales (47. lib. 1.) erit BC dupla ipſius HZ, ergo triangulum BOC eſt duplum trianguli HAZ; ſi tum biſecetur BG in E, diameter EM bifariam ſecabit ipſam BO, et proinde tranſibit per H; ergo propter æquales FM, MH, erit triangulum BMO duplum trianguli KHI, ſed BMO additur figuræ priori inſcriptæ, & KHI additur areæ quæ eſt extra circumſcriptam figuram, et ſimiliter ſi deinceps augeatur numerus laterum in figuris inſcriptis & circumſcriptis, quicquid additur areæ extra figuram circumſcriptam, ejus duplum ſemper additur figuræ inſcriptæ, & proinde figura inſcripta eſt ſemper dupla areæ quæ eſt extra circumſcriptam figuram.

Q. E. D.

Cor. I. Hinc, patet quod ſegmento Parabolico BOQC nulla figura inſcribi poteſt (ut in propoſitione) quæ erit dupla areæ BACO extra ſegmentum Parabolicum & intra triangulum BAC.

Cor. II. Patet etiam, quod ſegmento Parabolico BOQC nulla figura circumſcribi poteſt (ut in propoſitione) ita ut area extra eam & intra triangulum, ſit dimidium ſegmenti Parabolici BOQC.

PROP. XII.

Eiſdem manentibus, ſegmento Parabolico BOQC, Parabolâ et rectâ terminato, inſcribi poteſt (ut in Propoſitione præcedente) figura, quæ ab eo deficiat ſpatio minore quovis dato ſpatio. Vel huic ſegmento circumſcribi poteſt figura (ut in Propoſitione præcedente) quæ ab area BACO, ex- Fig. 11.

S tra

tra ſegmentum & intra triangulum BAC, auferat ſpatium quovis dato ſpatio minus.

Pars 1. SEGMENTO inſcribatur triangulum BOC, ut in Prop. præc. cum hoc ſit dimidium totius trianguli BAC erit plus quam dimidium ſegmenti Parabolici BOQC, & ſimiliter ſi reliquis ſegmentis inſcribantur triangula BMO, CQO, hæc auferent plus quam dimidia horum ſegmentorum & ſi in reliquis ſegmentis id ſemper fiat, idem continget; quare figura inſcripta tandem deficiet à ſegmento Parabolico ſpatio quovis dato ſpatio minore (1. 10.)

Pars 2. In area BACO inſcribatur triangulum HAZ cujus baſis HZ ſit parallela jungenti contactus BC, & quoniam æquales ſunt GO, OA, erunt etiam BH, HA ut & CZ, ZA æquales: ergo triangulum HAZ eſt dimidium triangulorum BOA, COA ſimul, & proinde eſt plus quam dimidium areæ BACO, & ſimiliter, ſi reliquis ſegmentis BHOM, CZQO inſcribantur triangula KHI, RZP, hæc auferent plus quam dimidia horum ſegmentorum, & ſi id ſemper fiat, idem continget; quare figura circumſcripta tandem auferet ab area BACO ſpatium quovis dato ſpatio minus.

PROP. XIII.

Fig. 11. Sit BOQC ſpatium Parabolâ & rectâ BC terminatum, ducatur recta Parabolam contingens in O parallela ipſi BC, & occurrens in X & T diametris ductis per puncta B & C; erit ſegmentum Parabolicum BOQC ad parallelogrammum circumſcriptum BXTC, ut 2. ad 3.

DUCANTUR enim contingentes BA, CA, & per ipſarum occurſum A ducatur diameter AG, quæ tranſibit per contactum O, & biſecabit ipſam BC in G; tum propter AG duplam ipſius AO, erit

erit triangulum BAC æquale parallelogrammo BXTC; eſt autem ſegmentum Parabolicum BOQC duplum areæ BACO, ſi enim excederet duplum iſtius areæ, quovis ſpatio S, tum per partem primam præcedentis, ſegmento BOQC inſcribi poteſt figura quæ deficiat ab hoc ſegmento ſpatio ipſo S minore, ergo erit hæcce figura major quam duplum areæ BACO contra Cor. 1. Prop. 11. ergo ſegmentum BOQC non excedit duplum areæ BACO. Nec vero a duplo hujuſce areæ deficiet; ſi enim area BACO dimidium ſegmenti BOQC excederet, ſpatio quovis S, tum per partem 2. Prop. præc. circumſcribi poteſt huic ſegmento figura, quæ auferat ab area BACO ſpatium quod ſit minus ſpatio S; ergo area extra hanc figuram & intra triangulum BAC excederet dimidium ſegmenti BOQC contra Cor. 2. Prop. 11. cum igitur ſegmentum BOQC nec excedit duplum areæ BACO, nec ab eo deficit, erit duplum iſtius areæ et proinde eſt ad totum triangulum BAC, hoc eſt, ad parallelogrammum BXTC, ut 2. ad 3. *Q. E. D.*

Cor. 1. Duo ſegmenta LDP, AKE ejuſdem Parabolæ ſunt inter ſe in *Seſquiplicata* ratione abſciſſarum DM, KT diametrorum, quæ rectas LP, AE biſecant. Ducantur enim a punctis L & A in Parabola rectæ LR, AH perpendiculares ad diametros DM, KT, erunt hæ altitudines parallelogrammorum LNDM, ABKT; ergo LNDM eſt ad ABKT in ratione compoſita ex ratione ipſius DM ad KT & LR ad HA, ſed quadratum ex LR eſt ad quadratum ex HA, ut DM ad KT (per Cor. 1. 3. huj.) eſt igitur LR ad HA in *Subduplicata* ratione ipſius DM ad KT, & proinde LNDM & ABKT ſunt in *Seſquiplicata* ratione ipſarum DM & KT, ergo tota parallelogramma ſegmentis circumſcripta ſunt in eadem ratione: ſed ſegmenta Parabolica LDP & AKE ſunt ut iſta parallelogramma, per Propoſitionem, unde conſtat Corrollarium. Fig. 12.

Cor. 2. Hinc, ſi LDP, AKE, fuerint ſegmenta diverſarum Parabolarum, eſſent inter ſe, in ratione compoſita ex *Seſquiplicata* ratione abſciſſarum DM, KT & *Subduplicata* ratione parametrorum principalium; nam perpendiculares LR, AH, ſunt in hoc caſu in ratione compoſita ex *Subduplicata* ratione abſciſſarum DM, KT, & *Subduplicata* ratione parametrorum principalium, ut patet ex Cor. 1. 3. hujus.

SECTI-

SECTIONUM

CONICARUM

LIBER QUARTUS.

De Ellipſi & Hyperbola.

PROPOSITIO I.

Si per vertices duarum diametrorum conjugatarum, ducantur quatuor rectæ contingentes Ellipſim aut Hyperbolas conjugatas; parallelogrammum iis contentum erit æquale rectangulo quod ſub axibus continetur.

SIT C centrum Ellipſeos aut Hyperbolæ cujus axes ſunt AB, M*m*, & ſint duæ quævis diametri conjugatæ ED, FG; contingentes per ipſarum vertices ductæ conficient parallelogrammum per Cor. 27. lib. 1. occurrant contingentes ductæ per F & D ſibi invicem in H, erit FCDH quarta pars totius parallelogrammi; a centro ducatur CK perpendicularis ad contingentem FH. Fig. 1, 2.

Quoniam

Quoniam per Cor. 1. 31. lib. 2. perpendicularis CK eſt ad CA ſemiaxem tranſverſum, ut CM ſemiaxis ſecundus ad CD ſemidiametrum contingenti FH parallelam, erit rectangulum CK in CD, hoc eſt, parallelogrammum FCDH æquale rectangulo quod ſemiaxibus CA & CM continetur; unde liquet propoſitum.

Cor. Manifeſtum eſt, parallelogrammum Ellipſi aut Hyperbolis conjugatis inſcriptum, jungendo vertices duarum diametrorum conjugatarum, eſſe dimidium parallelogrammi his conjugatis circumſcripti, & proinde omnia hujuſmodi parallelogramma eſſe inter ſe æqualia.

PROP. II.

Fig. 3. Si a verticibus duarum diametrorum conjugatarum CF, CG Ellipſeos, ducantur ad tertiam diametrum AB ordinatim applicatæ FE, GH; erit quadratum ex intercepta inter alterutram ductarum et centrum, æquale rectangulo contento ſegmentis inter reliquam ductam & vertices diametri ad quam ordinatæ ducuntur.

DUCATUR enim per verticem alterutrius diametri CF recta contingens Ellipſim & occurrens diametro AB in D, ejuſque conjugatæ M*m* in O, propter parallelas FD, CG & FE, GH erunt triangula FED, GHC æquiangula, & propter parallelas CO, FE, erunt rectangula OFD, CED ſimilia; eſt igitur OFD ad CED ut quadratum ex FD ad quadratum ex ED; ſive (ob æquiangula triangula) ut quadratum ex CG ad quadratum ex CH; ſed rectangulum OFD eſt æquale quadrato ex CG, (51. lib. 1.) ergo quadratum ex CH eſt æquale rectangulo CED, hoc eſt, rectangulo AEB (Cor. 1. 49. lib. 1.) contento ſegmentis diametri AB inter reliquam ductam FE & vertices ejus. Et ablatis hiſce æqualibus a quadrato ex CB, erunt

reliqua,

reliqua, ſciz. (5. 2.) rectangulum AHB & quadratum ex CE, æqualia. *Q. E. D.*

Cor. Manifeſtum eſt, quadrata ex ſegmentis diametri AB, ad quam ordinatæ ducuntur, inter ordinatas ſciz. & centrum, eſſe ſimul æqualia quadrato ex ſemidiametro CB: nam cum quadratum ex CH ſit æquale rectangulo AEB, erit quadratum ex CH ſimul cum quadrato ex CE æquale quadrato ex CB, per 5. 2.

PROP. III.

Summa quadratorum ex duabus quibuſvis diametris conjugatis Ellipſeos, æqualis eſt ſummæ quadratorum ex axibus.

SINT enim CB, CM ſemiaxes Ellipſeos & CF, CG duæ ſemidiametri conjugatæ, ſintque EF, GH perpendiculares ipſi CB; FL vero & GN perpendiculares ipſi CM. Fig. 3.

Quoniam per Cor. præced. quadratum ex CB æquale eſt quadratis CE, CH ſimul, & quadratum ex CM æquale quadratis ex CL, CN, hoc eſt, ex ipſis FE, GH; erunt quadrata ex CB, CM ſimul, æqualia quatuor quadratis ex CE, CH, FE, GH, quibus etiam quadrata ex CF, CG ſunt æqualia (47. 1.) ergo quadrata ex CF, CG ſunt æqualia quadratis ex CB, CM ſimul, igitur quadrata ex ipſis diametris ſunt æqualia quadratis ex axibus *Q. E. D.*

PROP.

PROP. IV.

Si anguli contenti aſymptotis Hyperbolæ ſint recti; duæ quævis diametri conjugatæ erunt inter ſe æquales. Si vero anguli aſymptotis contenti non ſint recti; duæ quævis diametri conjugatæ erunt inæquales, & differentia inter ipſarum quadrata erit æqualis differentiæ inter quadrata duarum quarumvis aliarum diametrorum conjugatarum.

FIG. 4. *Pars* 1. SINT AD, AE aſymptoti Hyperbolæ cujus centrum eſt A, et a centro ducatur ſemidiameter quævis AB, & per verticem ejus B ducatur contingens aſymptotis occurrens in punctis D, K, erit BD vel BK æqualis ſemidiametro ipſi AB conjugatæ (38. lib. 1.) igitur ſi foret angulus DAK rectus, circulus centro B & diametro DK deſcriptus tranſiret per punctum A (Converſ. 31. 1.) ideoque ſemidiameter AB æqualis eſſet ipſi BD vel BK, hoc eſt, ſemidiametro ipſi conjugatæ.

In hoc caſu Hyperbola dicitur *Æquilatera*.

Pars 2. Sint AD, AE aſymptoti Hyperbolæ angulum acutum continentes, & ductis ſemidiametro AB & contingente DBK ut prius; quoniam angulus DAE eſt acutus cadet extra ſemicirculum circa DBK deſcriptum (Converſ. 31. 1.) ideoque erit ſemidiameter tranſverſa AB major ipſâ BD vel BK. Ducatur nunc quævis alia ſemidiameter AC & per verticem ejus C ducatur contingens aſymptotis occurrens in punctis F, E, oſtendendum eſt quod differentia inter quadrata ex ipſis AB, BD æqualis eſt differentiæ inter quadrata ex ipſis AC, CF: a punctis B, K, C, E ducantur ad aſymptoton DA perpendiculares BG, KL, CH & EM, propter æquales DB, BK, erunt DG, GL æquales, & propter FC, CE æquales, erunt FH, HM æquales, & propter perpendicularem BG, erit differentia inter quadrata ex AB & BD æqualis differentiæ inter quadrata ex

GA

GA & GD ſive GL hoc eſt, rectangulo DAL (6. 2.) & ſimiliter erit differentia inter quadrata ex AC et CF æqualis differentiæ inter quadrata ex HA & HF ſive HM, hoc eſt, rectangulo FAM; quoniam vero triangula DAK, FAE ſunt æqualia (Cor. 2. 45. lib. 1.) latera circa angulum communem erunt reciproca, hoc eſt, DA erit ad FA, (ut AE ad AK hoc eſt propter parallelas) ut AM ad AL, ergo rectangulum DAL æquale eſt rectangulo FAM; ideoque differentia inter quadrata ex AB, BD æqualis eſt differentiæ inter quadrata ex AC, CF. Patet quod in Hyperbola ipſi BCN conjugata, diameter quævis tranſverſa minor eſt diametro ei conjugatâ. *Q. E. D.*

Si angulus aſymptotis contentus ſit ſemirectus, erit exceſſus quadratorum ex duabus diametris conjugatis duplum parallelogrammi circa ipſas deſcripti; & ſi Hyperbolæ axes & ipſarum differentia ſint proportionales, erit iſte exceſſus iſti parallelogrammo æqualis.

PROP. V.

Duæ diametri Ellipſeos, quæ bifariam ſecant rectas jungentes vertices axium, ſunt diametri conjugatæ & inter ſe æquales: & contra; ſi diametri conjugatæ Ellipſeos ſint inter ſe æquales, bifariam ſecabunt rectas jungentes vertices axium.

Pars. 1. SIT Ellipſis, cujus axes ſunt AB, M*m*, jungantur AM, BM, & ducantur diametri ED, FG, quæ has jungentes bifariam ſecant, occurrat FG ipſi BM in I, & propter MI, IB & etiam AC, CB æquales, erit diameter GF parallela ipſi AM, quæ ab ipſa ED bifariam ſecatur; ſunt igitur ED, FG diametri conjugatæ (27. lib. 1.) & propter angulum MCB rectum, Fig. 5.

& IB, IM æquales, centrum circuli circa triangulum MCB deſcripti erit in puncto I; ergo erit IC æqualis ipſi IB, & proinde angulus ICB æqualis eſt angulo IBC, hoc eſt, angulo alterno BCD; æquales ſunt igitur diametri ED, FG, per Cor. 3. Prop. 8. lib. 2.

Pars. 2. Si duæ diametri conjugatæ Ellipſeos ED, FG ſint inter ſe æquales, & a puncto B termino unius axis ducatur recta parallela alterutri conjugatarum, puta ED, tranſibit per terminum alterius axis. Nam occurrat hæc recta Ellipſi iterum in M, & diametro FG in I, erit BM biſariam ſecta in I, (Cor. 27. lib. 1.) jungatur CM, & quoniam æquales ſunt diametri ED, FG, erit angulus ICB æqualis angulo BCD (Cor. 3. 8. lib. 2.) hoc eſt angulo alterno IBC, & proinde recta IC æqualis eſt ipſi IB, vel IM; ergo deſcribi poteſt circulus centro I tranſiens per puncta B, C, M, erit igitur angulus MCB in ſemicirculo rectus; ergo cum AB ſit axis, erit MC*m* alter axis: ergo æquales conjugatæ ED, FG bifariam ſecant rectas jungentes vertices axium.

Q. E. D.

Cor. I. Hinc, patet eſſe tantum unum par diametrorum conjugatarum Ellipſeos inter ſe æqualium.

Cor. II. Hinc etiam, ſi a vertice unius axis M, ducantur ad vertices alterius axis rectæ MA, MB, erit angulus qui iiſdem comprehenditur æqualis angulo ECF ei oppoſito, qui comprehenditur diametris æqualibus conjugatis.

PROP.

PROP. VI.

Quadratum ex ſumma æqualium diametrorum conjugatarum Ellipſeos, eſt æquale quadrato ex ſumma duarum quarumvis conjugatarum una cum quadrato ex ipſarum differentia.

SINT rectæ GC, CF diametri conjugatæ æquales Ellipſeos, & AB, BD diametri quævis conjugatæ inæquales, & ſit AE ipſarum differentia; erit quadratum ex GF æquale quadrato ex AD ſimul cum quadrato ex AE. FIG. 6.

Nam quadrata ex GC, CF bis ſumpta ſunt æqualia quadratis ex AB, BD bis ſumptis (per 3. huj.) ſed quadrata ex GC, CF bis ſumpta ſunt æqualia quadrato ex GF (4. 2.) & quadrata ex AB, BD bis ſumpta ſunt æqualia quadrato ex AD, una cum quadrato ex AE: nam quadrata ex AB & BE (ſive BD) ſemel ſumpta æquantur rectangulo (ABE bis ſive) ABD bis, una cum quadrato ex AE (7. 2.) ergo quadrata ex AB, & BD bis ſumpta æquantur rectangulo ABD bis & quadratis ex AB, BD, & AE, hoc eſt, quadrato ex AD (4. 2.) una cum quadrato ex AE: ergo liquet propoſitum.

COR. Hinc, patet quod ſumma æqualium conjugatarum eſt major, & ſumma axium minor, ſummâ aliarum quarumvis conjugatarum; eſt enim differentia inter axes major quam differentia inter duas alias conjugatas, ut patet ex Prop. 8. lib. 2.

PROP. VII.

Angulus obtuſus, quem comprehendunt æquales conjugatæ diametri Ellipſeos, eſt maximus, & angulus acutus eſt minimus, angulorum omnium qui duabus conjugatis comprehendi poſſunt.

Fig. 7. SIT AB axis tranſverſus Ellipſeos & M*m* axis ejus ſecundus; junctis AM, MB, erit angulus AMB æqualis angulo obtuſo qui æqualibus conjugatis comprehenditur. (Cor. 2. 5. huj.) Sint CR, CT duæ quævis conjugatæ diametri inæquales, & a vertice axis tranſverſi A ducatur AR ipſi CR ordinatim applicata & occurrens Ellipſi in D, erit parallela ipſi CT, jungatur DB occurrens ipſi CT in T, & propter AC, CB & AR, RD æquales, erunt CR, TD parallelæ; ergo angulus ADB æqualis eſt angulo RCT; patet vero angulos AMB, ADB obtuſos eſſe, utpote intra ſemicirculum circa AB deſcriptum, (ut conſtat ex Prop. 8. lib. 2.) ſi per puncta A, M, B deſcribatur circulus, ſegmentum ejus AMB erit totum intra Ellipſim; nam recta BK contingens circulum in B & verſus M producta continet angulum acutum KBA cum axe AB (quia ſegmentum alternum BEA eſt ſemicirculo majus) ergo hæc recta & proinde arcus BM cadit intra Ellipſim, et ſi Ellipſi occurreret inter B & M & ab occurſu ducatur recta axi Ellipſeos M*m* ordinatim applicata, terminus ejus alter eſſet etiam in peripheria circuli AMB, & ergo Ellipſis & circulus in quinque punctis occurrerent, contra Cor. 3. 56. lib. 1. eſt igitur ſegmentum circuli AMB totum intra Ellipſim. Ergo angulus AMB hoc ſegmento contentus major eſt angulo ADB, extra idem ſegmentum: unde conſtat propoſitum.

PROP.

PROP. VIII. PROBL. I.

Datis poſitione & magnitudine duabus diametris conjugatis Ellipſeos aut Hyperbolæ; invenire duas alias conjugatas quæ datos angulos comprehendant.

Si anguli dati ſint recti, diametri inveniendæ ſunt axes, & Problema ſolutum eſt Propoſitione 7. lib. 2.

Caſ. 1. QUANDO diametri datæ ſunt axes, ſit AB axis major, et M*m* axis minor Ellipſeos aut Hyperbolæ, et ſint dati anguli VZX, VZY; circa axem majorem AB deſcribatur circulus AFBG, cujus ſegmenta AFB, AGB capiant angulos æquales angulis datis VZX, VZY, ſit FG diameter hujuſce circuli cum axe M*m* coincidens, et centrum ejus P. FIG. 7, 8.

Si angulus obtuſus datus VZX ſit æqualis angulo qui comprehenditur junctis AM, BM, in Ellipſi; circuli ſegmentum AFB occurret axi M*m* in vertice ejus M, in quo caſu diametri quæſitæ erunt diametri æquales conjugatæ per Cor. 2. Prop. 5. et ſi angulus datus VZX major fuerit angulo AMB, Problema erit impoſſibile per præcedentem. Si vero angulus datus VZX minor ſit ipſo AMB, circuli ſegmentum AFB occurret axi M*m* producto in F; tum a puncto F ducatur recta ipſi MB parallela, occurret circulo alicubi inter F et B, puta in S, ducatur a puncto S recta ipſi BC parallela, occurret ipſi CM in O quod erit inter F et centrum Ellipſeos C; quoniam (propter circulum) erunt GO, OS, OF, proportionales, erit GO ad OF, ut quadratum ex OS ad quadratum ex OF, hoc eſt (ob ſim. trian. OSF, CBM) ut quadratum ex CB ad quadratum ex CM; ſimiliter in Hyperbola ſumatur punctum O in diametro FG producta ita ut GO ſit ad FO, ut quadratum ex CB ad quadratum ex CM, et in utraque ſectione deſcribatur circulus,

circulus, centro P et intervallo PO, occurrens axi AB in duobus punctis quorum unum ſit Q, ducatur per Q diameter circuli AFBG ipſi occurrens in punctis D, N, horum punctorum D quod eſt ipſi Q propius erit in Ellipſi aut Hyperbola cujus axis tranſverſus eſt AB et axis conjugatus M*m*. Nam a puncto D ducatur recta ipſi AB perpendicularis, ei occurrens in H et circulo rurſus in L, jungatur LN et propter angulum DLN in ſemicirculo rectum, erunt LN, HQ parallelæ; eſt autem rectangulum LHD ad quadratum ex DH, ut LH ad HD, ſive ut NQ ad QD, hoc eſt per conſtructionem, ut GO ad OF ſive ut quadratum ex CB ad quadratum ex CM, eſt igitur rectangulum LHD ſive (propter circulum) AHB ad quadratum ex DH, ut quadratum ex AB ad quadratum ex M*m*: ergo punctum D eſt in Ellipſi aut in Hyperbola, cujus axis tranſverſus eſt AB et axis conjugatus M*m*, per Cor. Prop. 34, & 35. lib. 1.

Inflectantur igitur ad punctum D rectæ AD, BD, et a centro ſectionis ducantur CR, CT has rectas bifariam ſecantes, erunt hæ diametri quæſitæ. Nam propter AR, RD et etiam AC, CB æquales, erit CR parallela ipſi BD, et ſimiliter erit CT parallela ipſi AD; ergo CR, CT ſunt diametri conjugatæ (27. lib. 1.) et comprehendunt angulum RCT æqualem angulo ADB, et proinde comprehendunt angulos (æquales iis qui continentur circuli ſegmentis AFB, AGB, hoc eſt) æquales angulis datis VZX, VZY. Quoniam circulus intervallo PO deſcriptus occurrit axi AB in alio puncto præter Q, patet quod eodem modo inveniri poſſunt duæ aliæ diametri conjugatæ, quæ angulos comprehendent æquales angulis datis VZX, VZY. *Q.E.I.*

Si circulus AFBG deſcriptus fuiſſet circa axem minorem, tum inventâ diametro DQN ut prius, punctum N ab ipſo Q remotius eſſet in Ellipſi vel in Hyperbola, ut patet.

Cum

Cum axes Hyperbolæ ſunt æquales; circa alterutrum axem deſcribatur ſegmentum circuli AFB capiens angulos datos VZX VZY ut prius; & ducatur recta DH axi AB perpendicularis ei occurrens in H & circulum contingens in D, & quoniam quadratum ex DH eſt æquale rectangulo AHB, erit punctum D in Hyperbola, & junctis AD, BD, diametri CR, CT quæ bifariam ſecant jungentes erunt diametri quæſitæ ut prius.

Caſ. 2. Quando diametri datæ non ſunt axes. Quoniam per Prop. 7. lib. 2. axes inveniri poſſunt poſitione & magnitudine ex datis duabus conjugatis, hic caſus ad caſum præcedentem reducitur, et cum diametri quæſitæ inveniuntur poſitione, ipſarum vertices inveniri poſſunt eodem modo, quo vertices axium inventæ fuerunt in Prop. 7. lib. 2.

Vel hoc Problema generaliter ſolvi poteſt quæcunque ſint diametri conjugatæ datæ, ſciz. deſcribendo circa unam ex diametris datis circulum, cujus ſegmenta capiant angulos datos, et inveniendo ejus interſectionem cum Ellipſi, vel cum Hyperbola circa cujus diametrum tranſverſum deſcribitur; quod fieri licet methodo haud diſſimili ei quâ inventa fuit interſectio Ellipſeos aut Hyperbolæ cum circulo circa axem ejus deſcripto in primo caſu hujus.

PROP. IX. PROBL. II.

Datis poſitione & magnitudine duabus diametris conjugatis Ellipſeos aut Hyperbolæ, & rectâ poſitione datâ; invenire puncta in quibus hæc recta ſectioni occurret.

SINT AB, M*m* diametri datæ & C centrum Ellipſis aut Hyperbolæ. FIG. 9. 10.

Caſ. 1. Primo, ſi recta poſitione data ſit parallela uni ex diametris conjugatis & occurrat alteri inter vertices ejus cum ſectio ſit

ſit Ellipſis, vel cum ſit Hyperbola ſi occurrat diametro ejus tranſverſæ productæ; quoniam erit recta ordinatim applicata huic diametro, puncta in quibus ſectioni occurret inveniri poſſunt per Cor. Prop. 34. & 35. lib. 1. & ſi occurrat diametro ſecundæ Hyperbolæ, puncta in quibus occurret Hyperbolis oppoſitis inveniri poſſunt per Prop. 32. lib. 1.

Caſ. 2. Si vero poſitione detur recta PQ non parallela alterutri diametrorum AB vel M*m*. Ducatur per verticem diametri AB recta AT alteri diametro M*m* parallela, hæc ſectionem continget (Cor. 27. lib. 1.) a centro ducatur diameter ipſi PQ parallela & occurrens AT in H, & in eadem AT ſumatur ſegmentum AK (verſus punctum H in Hyperbola, ad partes autem contrarias in Ellipſi) ita ut rectangulum KAH ſit æquale quadrato ex CM, & jungatur CK, erunt CH, CK diametri conjugatæ (Cor. Prop. 51. lib. 1.) ducatur ergo AE ad diametrum CK, & ipſi CH parallela, erit ipſi CK ordinatim applicata. Sint igitur CE, CF, CK proportionales & erit F vertex diametri, quæ in recta CK jacet. Eodem modo inveniuntur vertices diametri, quæ jacet in recta CH: ergo hic caſus reducitur ad caſum primum. Si vero in utrovis caſu recta PQ tranſeat per verticem unius diametri conjugatæ, & ſit parallela alteri, ſectionem continget, ut patet.

Cor. Hinc, ex datis poſitione & magnitudine duabus diametris conjugatis, patet methodus ducendi rectam quæ ſectionem contingat, & ſit parallela rectæ poſitione datæ.

PROP.

llipſim FIG. 11, 12.
; rectis
ratione

, & M*m*
ctis EF,
erſectio
x quod
; occur-
G in V.

TS ad FIG. 11.
ad AB,
pſi AB
ad CA;
ſis deſ-
CM ad
ex TQ
ex KL
EK eſt
lib. 1.)
er, quia
Ellipſi.
, G, H FIG. 12.
ſe inter
t quam
Q, erit
m CK
r CA
vel

UNIV. OF MICH.

ſit Ellip
verſæ
diamet
Cor. P
Hyperb
veniri p

Caſ.
diamet
recta *A*
(Cor. 2
occurre
(verſus
Ellipſi)
jungatu
lib. 1.)
erit ipſ
portion
Eodem
CH: e
utrovis
conjuga

Cor.
conjuga
gat, &

PROP. X. PROBL. III.

Circa datum parallelogrammum EFGH deſcribere Ellipſim aut Hyperbolas oppoſitas, ita ut diameter ſectionis rectis EH, FG parallela, ſit ad ipſius conjugatam in data ratione ſciz. ut TS ad TQ. FIG. 11, 12.

DUCANTUR recta AB bifariam ſecans ipſas EH, FG, & M*m* bifariam ſecans ipſas EF, HG; erit AB parallela rectis EF, HG, & M*m* rectis EH, FG; manifeſtum eſt quod interſectio harum rectarum C erit centrum ſectionis deſcribendæ, & quod diametri jacentes in rectis AB, M*m* erunt diametri conjugatæ; occurrat recta AB ipſi EH in K & recta M*m* ipſi EF in D & ipſi HG in V.

Caſ. 1. Sit primum ſectio deſcribenda Ellipſis, & ut TS ad TQ ita ſit EK ad rectam KL, & ſit KL perpendicularis ad AB, centro C & intervallo CL deſcribatur circulus occurrens ipſi AB in punctis A, B; et ut TS ad TQ ita ſit CM vel C*m* ad CA; Ellipſis cujus diametri conjugatæ ſunt M*m*, AB erit Ellipſis deſcribenda. Nam per conſtructionem, eſt quadratum ex CM ad quadratum ex CA, ut quadratum ex TS ad quadratum ex TQ et in eadem ratione eſt quadratum ex EK (ad quadratum ex KL ſive propter circulum) ad rectangulum BKA, & recta EK eſt parallela ipſi CM, ergo erit punctum E in Ellipſi (Cor. 34. lib. 1.) et quoniam EK, KH ſunt æquales erit H in Ellipſi, & ſimiliter, quia ED, DF & HV, VG ſunt æquales erunt puncta F & G in Ellipſi. FIG. 11.

Caſ. 2. Sint nunc Hyperbolæ oppoſitæ per puncta E, F, G, H deſcribendæ, in hoc caſu oportet rectas TS, TQ non eſſe inter ſe, ut EK, CK; ſit igitur EK ad KC in ratione minore eâ quam habet TS ad TQ et ſit EK ad rectam KL, ut TS ad TQ erit KL minor ipſâ KC, deſcribatur ſemicirculus ſuper ipſam CK et huic inſcribatur recta KL, jungatur CL et ſumatur CA FIG. 12.

U vel

vel CB æqualis ipſi CL, et ut TS ad TQ, ita ſit CM vel *Cm* ad CA.

Hyperbolæ oppoſitæ, quarum AB ſit diameter tranſverſa, & M*m* diameter ei conjugata, erunt Hyperbolæ deſcribendæ; nam per conſtructionem eſt quadratum ex CM ad quadratum ex CA, ut quadratum ex TS ad quadratum ex TQ; ſive ut quadratum ex EK (ad quadrum ex KL, ſciz. differentiam inter quadrata ex CA et CK, hoc eſt) ad rectangulum BKA (6. 2.) ſed recta EK eſt parallela ipſi CM, ergo erit punctum E in una ex Hyperbolis oppoſitis (Cor. 35. lib. 1.) et quoniam EK, KH ſunt æquales, erit H in eadem Hyperbola, et quoniam ED, DF & HV, VG ſunt æquales, et hæ rectæ ſunt parallelæ diametro AB occurruntque ejus conjugatæ M*m* in D & V, erunt puncta F et G in Hyperbola oppoſita.

Si vero EK ſit ad KC in ratione majore eâ quam habet TS ad TQ, fiat ut quadratum ex TS ad quadratum ex TQ, ita quadratum ex EK ad ſummam quadratorum ex KC & alia quadam recta, puta CA, tum centro C & intervallo CA deſcribatur circulus occurrens rectæ CK in punctis A, B, & ut eſt TS ad TQ, ita ſit CM vel C*m* ad CA; Hyperbolæ oppoſitæ, quarum M*m* ſit diameter tranſverſa & AB diameter ei conjugata, erunt Hyperbolæ deſcribendæ; nam quadratum ex CM eſt ad quadratum ex CA, ut quadratum ex TS ad quadratum ex TQ ſive ut quadratum ex EK ad ſummam quadratorum ex CK & CA, ergo Hyperbolæ tranſibunt per puncta E, H, G, F, ut patet ex Prop. 32. lib. 1. *Q. E. F.*

Si vero TS ſit ad TQ ut EK ad KC, Problema in hoc caſu eſt impoſſibile. Nam ſi deſcribantur Hyperbolæ quarum diametri conjugatæ jacent in rectis M*m*, AB & ſint inter ſe, ut EK, KC, punctum E erit ad ipſarum aſympton.

Cor. I. Cum ex conditionibus hujuſce problematis patet, quod poſitiones & magnitudines diametrorum AB, M*m* dantur; manifeſtum

fectum eſt, unicam Ellipſim, vel duas tantum Hyperbolas oppoſitas deſcribi poſſe, quæ Problemati ſatisfacient.

Cor. II. Hinc, circa datum parallelogrammum EFGH deſcribi poſſunt Ellipſis aut Hyperbolæ oppoſitæ, ita ut Ellipſis, vel una ex Hyperbolis, tranſeat per datum punctum P. Ducantur enim rectæ AB, Mm biſariam ſecantes latera oppoſita parallelogrammi, in his rectis erunt diametri conjugatæ ſectionis deſcribendæ; per punctum P ducatur recta ipſi AB parallela, et occurrens Mm in R, & lateri EH in O, & ſit RN æqualis ipſi PR; tum ſi per E, F, G, H deſcribantur Ellipſis aut Hyperbolæ oppoſitæ, ita ut quadratum ex diametro in recta AB ſit ad quadratum ex diametro in recta Mm, ut rectangulum PON ad rectangulum EOH, erit punctum P, in hac Ellipſi, vel in una ex Hyperbolis, ut patet.

Si ſectio deſcribenda ſit Ellipſis, oportet punctum P eſſe inter oppoſita latera parallelogrammi producta. Si vero ſit Hyperbola oportet P eſſe intra parallelogrammum vel inter latera adjacentia producta.

Cor. III. Hinc vel Ellipſis vel Hyperbolæ oppoſitæ deſcribi poſſunt, ita ut ipſarum centrum ſit punctum datum C, & diameter recta MCm poſitione data, & ut rectæ parallelæ EF, PN ab ipſa MCm biſariam ſectæ in D et R, ſint iſti diametro ordinatim applicatæ. Sumatur enim in recta Mm ſegmentum CV ipſi CD æquale & per V ducatur GH ipſi EF parallela et æqualis, et biſariam ſecta in V; jungantur HE, GF & per Cor. præcedens deſcribantur Ellipſis aut Hyperbolæ oppoſitæ circa parallelogrammum EFGH, quarum una tranſeat per punctum P, erit hæc ſectio deſcribenda; nam erit recta Mm diameter ejus, quia biſariam ſecat parallelas EF, GH Ellipſi aut Hyperbolis oppoſitis terminatas, & ei ordinatim applicata erit recta PN ipſis EF, GH parallela; & quia æquales ordinatæ EF, GH æqualiter a puncto C diſtant, erit iſtud punctum C centrum. Si rectæ datæ EF, PN ſint æquales

et a puncto C æqualiter diſtant, quotlibet Ellipſes aut Hyperbolæ deſcribi poſſunt, quæ Problemati ſatisfacient.

Si vero hæ rectæ EF, PN æqualiter diſtant a puncto C, cum ſunt inæquales, vel inæqualiter diſtant ab eodem puncto, cum ſunt æquales, Problema eſt impoſſibile. Si recta minor EF longius diſtat a puncto C quam recta major PN, ſectio deſcribenda erit Ellipſis, ſi vero contrarium eveniat, deſcribendæ ſunt ſectiones oppoſitæ; & cum in utroque caſu patet ſectiones deſcribendas neceſſario tranſire per ſex puncta data ex conditionibus Problematis; manifeſtum eſt, quod unica Ellipſis deſcribi poteſt, vel duæ tantum Hyperbolæ oppoſitæ, quæ Problemati ſatisfacient quia duæ ſectiones conicæ vel ſectiones oppoſitæ per Cor. 3. 56. lib. 1. ſibi invicem occurrere nequeunt in quinque punctis multo minus in ſex.

Hæc Propoſitio ejuſque corollaria ut et Propp. 14. 15. hujus deſumuntur ex opera illuſt. *Marchionis de l' Hoſpital.*

PROP. XI.

Fig. 13, 14.

Ellipſi aut Hyperbolis oppoſitis poſitione datis inſcribatur parallelogrammum KLNO, ſi diameter AB bifariam ſecans latera ejus oppoſita in R & S punctis, ſemper datam habeat rationem ad ipſius ſegmentum RS inter iſta latera; erit parallelogrammum KLNO ſemper ejuſdem magnitudinis.

SIT C centrum ſectionis, erunt CR, CS æquales ut patet, ducatur diameter M*m* parallela lateribus LN, KO, erit conjugata ipſi AB; circa has conjugatas deſcribatur parallelogrammum, erit æquiangulum parallelogrammo KLNO, et proinde hæc parallelogramma ſunt inter ſe in ratione compoſita ex rationibus laterum; per hypotheſin ratio ipſius AB ad RS ſive KL datur, ergo datur ratio quadrati ex CB (ad quadratum ex CR, & igitur) ad rectangulum ARB (differentiam ſciz. inter quadrata ex CB

et

et CR) et proinde datur ratio diametri M*m* ad LN ipſi AB ordinatim applicatam; datur igitur ratio quæ ex hiſce datis rationibus AB ad KL & M*m* ad LN componitur: ergo ratio inter parallelogramma æquiangula datur: ſed parallelogrammum AMB*m* magnitudine datur (1. huj.) ergo parallelogrammum KLNO eſt ſemper ejuſdem magnitudinis. *Q. E. D.*

PROP. XII.

Si latera parallelogrammi EFGH contingant Ellipſim aut producta contingant Hyperbolas oppoſitas poſitione datas & ſi diameter ſectionis AB, quæ (ſi opus producta) tranſeat per angulos oppoſitos E & G, datam habeat rationem ad ſegmentum EG inter iſtos angulos; erit parallelogrammum EFGH ſemper ejuſdem magnitudinis. Fig. 13, 14.

SINT puncta contactus K, L, N, O, & rectæ KN, LO, jungentes oppoſita puncta contactus, erunt diametri (Cor. 2. 22. lib. 1.) & quatuor rectæ hæc puncta jungentes conficient parallelogrammum KLNO; ducatur diameter AB bifariam ſecans parallelas LN, KO in R & S, tranſibit hæc per angulos E et G (Cor. 1. 26. lib. 1.) ſimiliter diameter M*m* bifariam ſecans rectas KL, ON tranſibit per reliquos angulos F & H & erit ipſi AB conjugata. Quoniam igitur, per hypotheſin, datur ratio ipſius CB ad CG, datur & ratio ipſius CB ad CR, et ergo ut in præcedente datur ratio ſemidiametri CM ad ordinatam LR vel ad CT ipſi LR æqualem; datur igitur ratio CM ad CF, et igitur ſi ducantur MP, PQ perpendiculares ad diametrum AB, dabitur ratio ipſius MP ad FQ. Datur igitur ratio, quæ ex his datis rationibus AB ad EG, & MP ad FQ componitur, hoc eſt, ratio rectanguli AB in MP ad rectangulum EG in FQ; ſed rectangulum AB in MP magnitudine datur (1. huj.) ergo rectangulum EG in

FQ,

FQ. hoc eſt parallelogrammum EFGH eſt ſemper ejuſdem magnitudinis. *Q. E. D.*

PROP. XIII.

Fig. 15, 16. Si latera parallelogrammi EFGH contingant Ellipſim, aut producta contingant Hyperbolas oppoſitas; erit hocce parallelogrammum ad parallelogrammum circa quaſvis diametros ſectionis conjugatas deſcriptum, ut unum ex ejus lateribus HG ad diametrum ſectionis quæ iſti lateri eſt parallela.

SIT AB diameter ſectionis parallela lateribus HG, EF, et ducatur diameter M*m* ipſi AB conjugata, tranſibit hæc per puncta in quibus latera HG, EF Ellipſim aut Hyperbolas oppoſitas contingant (Cor. 27. lib. 1.) circa has diametros conjugatas deſcribatur parallelogrammum KLNO, erit inter eaſdem parallelas, cum parallelogrammo EFGH, ergo EFGH eſt ad KLNO, ut HG ad (ON ſive) diametrum AB quæ ipſi HG eſt parallela; eſt autem KLNO æquale parallelogrammo circa quavis alias diametros conjugatas deſcripto; unde liquet propoſitum.

Cor. I. Ex hac propoſitione patet, quod parallelogrammum circa diametros conjugatas Ellipſeos deſcriptum, minimum eſt omnium parallelogrammorum, quæ circa eandem Ellipſim deſcribi poſſunt.

Cor. II. Jungantur AM, BM, & patet triangulum AMB maximum eſſe, quod eidem Semi-Ellipſi inſcribi poteſt; et proinde parallelogrammum Ellipſi inſcriptum jungendo vertices diametrorum conjugatarum maximum eſt quod eidem Ellipſi inſcribi poteſt; eſt igitur parallelogrammum maximum Ellipſi inſcriptum, dimidium minimi parallelogrammi eidem Ellipſi circumſcripti. Hæc omnia, quæ ſunt demonſtrata de parallelogrammis Ellipſi

Ellipſi aut Hyperbolis inſcrptis vel circumſcriptis, tenent etiam de parallelogrammis circulo inſcriptis vel circumſcriptis.

PROP. XIV.

Si in CN aſymptoto Hyperbolæ, ſumantur a centro partes CK, CL quæ ſint inter ſe in eadem ratione qua ſunt duæ aliæ quævis partes CG, CH ſumptæ in eadem aſymptoto CN; & ſi ducantur rectæ GF, HD, KB, LE, parallelæ alteri aſymptoto CP, occurrentes Hyperbolæ in punctis F, D, B, E, & ducantur ſemidiametri CF, CD, CB, CE; erunt ſectores Hyperbolici CBF, CDF inter ſe æquales. Fig. 17.

DUCANTUR enim rectæ BD, EF aſymptotis occurrentes in punctis M, O & N, P, et quoniam parallelæ ſunt KB, HD, CO, erit MK ad MB, ut HC ad DO, ergo propter æquales MB, DO, erunt MK, HC æquales; et ſimiliter propter parallelas LE, GF, CP et æquales NE, FP, erunt NL, GC æquales, eſt igitur MK ad NL (ut HC ad GC, hoc eſt per hypotheſin, ut LC ad KC, ſive propter Hyperbolam) ut KB ad LE; anguli autem MKB, NLE ſunt æquales: ergo triangula MKB, NLE ſunt ſimilia, et proinde rectæ MB, NE, hoc eſt BD, EF, ſunt parallelæ. Ducatur igitur ſemidiameter bifariam ſecans parallelas BD, EF in punctis A, Q, et quoniam bifariam ſecabit omnes rectas Hyperbolâ terminatas et ipſis BD, EF parallelas, bifariam ſecabit aream EBDF, ergo cum æqualia ſunt triangula CQF, CQE, ſi ab iis auferantur æquales areæ QADF, QABE et triangula æqualia CDA, CAB, reliqua, ſciz. ſectores Hyperbolici CDF, CBE, erunt æqualia.

Cor. Si in aſymptoto CN, partes CG, CH, CK ſint continue proportionales et ducantur GF, HD, KB, ut in Propoſitione, et jungatur

jungatur BF, eodem modo probari poteſt, quod recta BF eſt parallela contingenti ductæ per punctum D; & proinde quod ſectores CDF, CDB ſunt æquales; ideoque ſi quotlibet partes CG, CH, CK, CL &c. ſint continue proportionales, & ducantur rectæ GF, HD, KB, LE, &c. aſymptoto CP parallelæ; ſectores CDF, CDB, CBE &c. erunt omnes inter ſe æquales.

PROP. XV.

Fig. 17. Si a verticibus ſemidiametrorum CD, CB, ducantur rectæ DH, BK ad aſymptoton CN, & alteri aſymptoto CP parallelæ; erit ſector Hyperbolicus CBD æqualis trapezio Hyperbolico DHKB.

NAM triangula CHD, CKB ſunt æqualia, utpote dimidia æqualium parallelogrammorum (Cor. 2. 43. lib. 1.) ergo ſi ab iis auferatur commune triangulum CHR, erit triangulum CDR æquale trapezio HKBR, & ſi his addatur ſpatium DBR, erit ſector CBD æqualis trapezio hyperbolico DHKB.

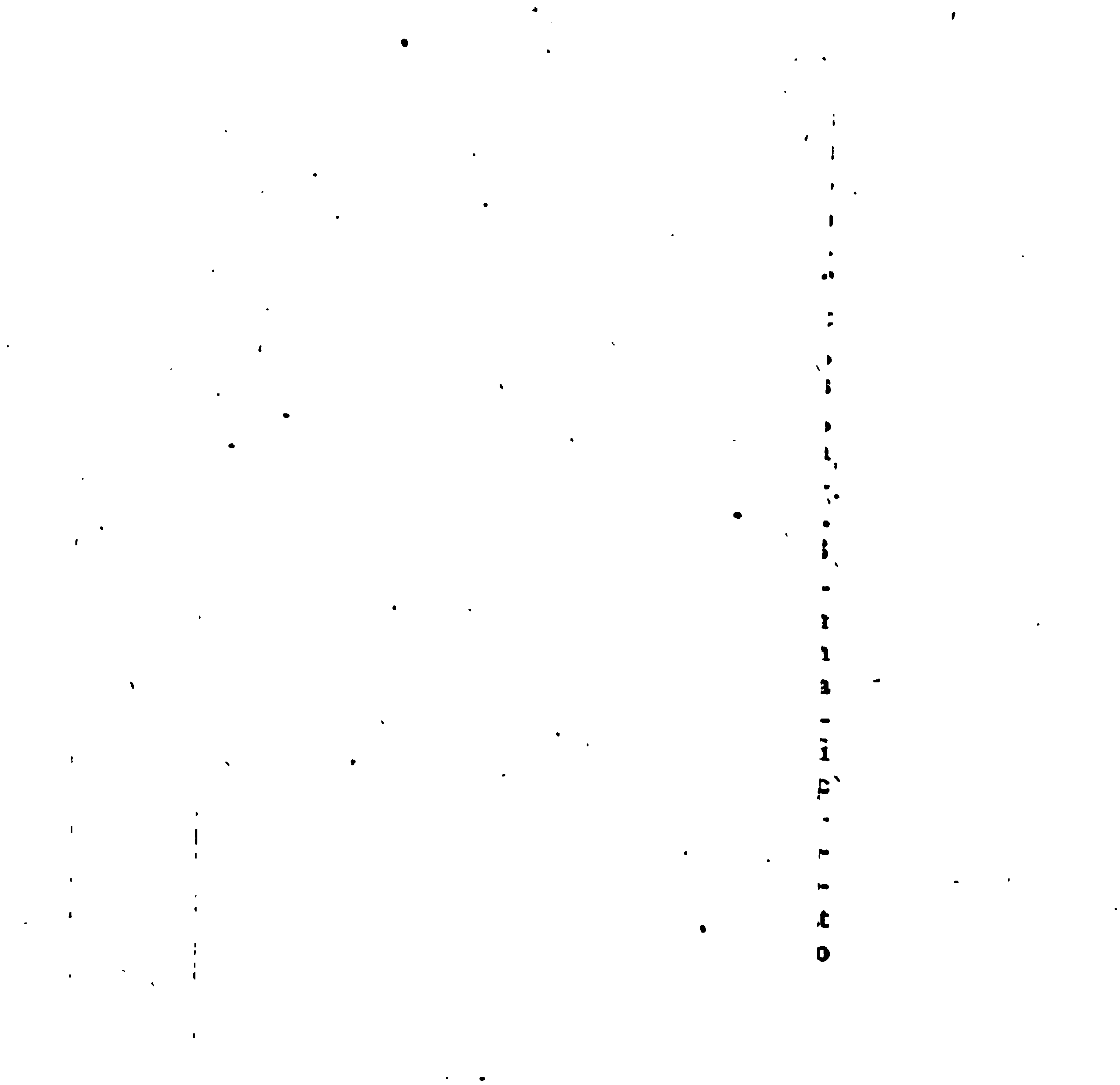
Cor. Hinc & ex Corollario præcedente, ſi in aſymptoto CN ſumantur quotlibet partes CG, CH, CK, CL continue proportionales, & ducantur ad Hyperbolam rectæ GF, HD, KB, LE, &c. aſymptoto CP parallelæ, trapezia Hyperbolica FGHD, DHKB, BKLE, erunt omnia inter ſe æqualia.

PROP. XVI. *Quæ eſt* V. *Archimedis de Conoid. & Sphæroid.*

Omne ſpatium ab Ellipſi comprehenſum eſt ad circulum cujus diameter æqualis eſt axi tranſverſo Ellipſeos, ut axis ſecundus ad axem tranſverſum.

Archimedis

Fig. 18.



UNIV. OF MICH.

1

jv
ri
tc
C
G
C

FIG. 17. S

I
ſi
æ
to

ſu
na
aſ
BI

PR

O

Archimedis Demonſtratio.

SIT enim Ellipſis cujus axis tranſverſus eſt AC & axis ſecundus BD, & ſit circulus circa diametrum AC deſcriptus; oſtendendum eſt ſpatium Ellipſi comprehenſum ad circulum eandem habere rationem, quam BD ad CA ſive EF: quam vero rationem habet BD ad EF, eandem habeat circulus in quo eſt Z ad circulum AECF; dico quod circulus Z æqualis eſt Ellipſi. Si enim circulus Z non ſit æqualis, ſpatio ABCD ab Ellipſi comprehenſo, ſit primo, ſi fieri poteſt, major: poterit igitur in circulo Z polygonum parem habens numerum angulorum inſcribi, majus ABCD ſpatio; intelligatur inſcriptum eſſe, & in circulo AECF inſcribatur polygonum ſimile ei quod in Z circulo inſcriptum eſt; & ab ipſius angulis perpendiculares ducantur ad diametrum AC, puncta vero, in quibus perpendiculares Ellipſim ſecant, rectis jungantur: erit igitur polygonum quoddam in Ellipſi inſcriptum, quod habebit ad polygonum in circulo AECF inſcriptum, eandem rationem, quam habet BD ad ipſam EF: nam quoniam perpendiculares EH, KL in eadem ratione ſectæ ſunt in B et M (Cor. 2. Prop. 30. lib. 1.) manifeſtum eſt, quod trapezium LE ad ipſum LB eandem habet rationem, quam habet HE ad HB; quare et unumquodque reliquorum in circulo trapeziorum ad unumquodque in Ellipſi trapezium, eandem habet rationem quam habet EH ad ipſam BH; habent autem et triangula in circulo ad puncta A, C, ad ea quæ in Ellipſi ſunt, eandem rationem; habebit igitur totum polygonum in circulo AECF inſcriptum ad totum polygonum in Ellipſi inſcriptum, eandem rationem quam habet EF ad ipſam BD: hanc autem rationem habet idem hoc polygonum, ad polygonum inſcriptum in circulo Z, quoniam & ipſi circuli hanc habent rationem; polygonum igitur in circulo Z inſcriptum æquale eſt, polygono Ellipſi inſcripto, contra hypotheſin, majus enim erat Fig. 18.

X toto

toto ſpatio ab Ellipſi comprehenſo. Sed eſto, ſi fieri poteſt, circulus Z minor ſpatio ABCD, rurſus poteſt in Ellipſi inſcribi polygonum, paribus numero lateribus contentum, majus circulo Z. Inſcribatur igitur, & ab ipſius angulis perpendiculares ducantur ad ipſam AC, & producantur ad circumferentiam circuli; rurſus igitur inſcriptum erit in circulo AECF polygonum, quod habebit ad inſcriptum in Ellipſi eandem rationem, quam habet EF ad BD, et ſi inſcribatur in circulo Z polygonum huic ſimile, oſtendetur inſcriptum in circulo Z æquale eſſe inſcripto in Ellipſi; quod fieri non poteſt: neque igitur minor eſt circulus Z ſpatio ab Ellipſi comprehenſo. Manifeſtum igitur eſt dictum ſpatium ad circulum ABCF eandem habere rationem, quam habet BD ad ipſam EF. *Q. E. D.*

Cor. I. Hinc, patet omne ſpatium Ellipſi comprehenſum æquale eſſe circulo, cujus diameter eſt media proportionalis inter axes Ellipſeos.

Cor. II. Hinc, quævis Ellipſis eſt ad rectangulum ejus axibus contentum, ut circulus ſe habet ad quadratum ex ipſius diametro. Quoniam enim Ellipſis æqualis eſt circulo, cujus diameter eſt media proportionalis, inter ejus axes; erit rectangulum axibus Ellipſeos contentum æquale quadrato ex diametro hujuſce circuli; eſt igitur Ellipſis ad iſtud rectangulum, ut circulus iſte ad quadratum ex ipſius diametro.

SECTI-

SECTIONUM CONICARUM

LIBER QUINTUS.

De Sectionibus ſimilibus, & de Affectionibus Sectionum Conicarum, quæ a rectis harmonice ſectis pendent; de circulis eandem cum Sectionibus Curvituram habentibus, & de Sectionibus deſcribendis, quæ per data puncta tranſeant, & rectas poſitione datas contingant.

DEFINITIO I.

SI duæ diametri conjugatæ Ellipſeos aut Hyperbolæ ſint inter ſe, ut duæ diametri conjugatæ alterius Ellipſeos aut Hyperbolæ quæ eoſdem cum ipſis angulos comprehendunt; hæ duæ Ellipſes aut Hyperbolæ dicuntur *Similes*.

PROP. I.

Fig. 1, 2. Sint duæ Ellipſes aut Hyperbolæ inter ſe ſimiles, & ita ponantur ut habeant centrum commune C; & ut duæ diametri conjugatæ AB, MN unius ſectionis coincidant cum duabus diametris conjugatis *ab*, *mn* alterius ſectionis quibus ſunt proportionales; dico quod duæ quævis diametri conjugatæ unius ſectionis coincident cum diametris conjugatis alterius ſectionis: & quod omnes diametri coincidentes eandem rationem inter ſe habebunt.

Pars 1. DUCANTUR CD, CF ſemidiametri conjugatæ exterioris ſectionis ſciz. cujus diametri ſunt AB, MN; tum C*d*, C*f* interioris ſectionis ſemidiametri cum ipſis CD, CF coincidentes erunt conjugatæ.

Ducantur enim per M, *m* vertices diametrorum coincidentium duæ rectæ ſectiones contingentes erunt ſibi invicem parallelæ (per hypoth. & Cor. 27. lib. 1.) occurrant vero ſemidiametris CD, CF, cum opus productis, in punctis L, O & H, K; tum propter parallelas erunt rectangula OML, K*m*H ſimilia, ideoque ſunt inter ſe ut quadrata ex OM, K*m* vel CM, C*m*, hoc eſt, ut quadrata ex CA, C*a* per hypoth. ſed rectangulum OML eſt æquale

quadrato

quadrato ex ſemidiametro CA (51. lib. 1.) ergo rectangulum K*m*H eſt æquale quadrato ex C*a* ſemidiametro interioris ſectionis, ideoque erunt C*d*, C*f* iſtius ſectionis ſemidiametri conjugatæ per Cor. 51. lib. 1.

Pars 2. Ducantur nunc CM, CD duæ quævis ſemidiametri ſectionis exterioris & ſint C*m*, C*d* ſemidiametri ſectionis interioris cum iis coincidentes; erit CM ad C*m*, ut CD ad C*d*.

Jungatur MD & ducatur CR ipſam MD bifariam ſecans in P & ſit C*r* ſemidiameter ſectionis interioris cum ipſa CR coincidens; quoniam, per partem primam, diametri quæ ipſis CR, C*r* ſunt conjugatæ coincidunt, rectæ ipſis CR, C*r* ordinatim applicatæ erunt parallelæ, ducatur *mp* ordinatim applicata ipſi C*r* & producatur ut occurrat ipſi CD in quodam puncto *d*, tum propter MD, *md* parallelas & MP, PD æquales, erunt etiam *mp*, *pd* æquales, ergo quoniam *mp* ordinatim applicatur ipſi C*r* & punctum *m* eſt in ſectione interiore, erit punctum *d* in eadem ſectione, ideoque eſt punctum *d* vertex ſemidiametri C*d*, & proinde propter parallelas MD, *md* erit CM ad C*m*, ut CD ad C*d*. *Q. E. D.*

Cor. I. Si duæ Ellipſes aut Hyperbolæ ſint ſimiles & ſimiliter poſitæ (id eſt poſitæ ut in hac propoſitione) et recta TX ſectione exteriore terminata interiorem contingat; in puncto contactus bifariam ſecabitur: ſit enim contactus *m*, & ducantur per *m* diametri coincidentes CM, *cm*, & quoniam contingens TX eſt parallela diametro ipſi C*m* conjugatæ, & diametri ipſis C*m*, CM conjugatæ coincidunt per partem primam hujus, erit recta TX ordinatim applicata diametro CM & proinde in puncto *m* bifariam ſecta.

Cor. II. Vel ſi recta YZ ſectione exteriore terminata occurrat interiori in duobus punctis *m* & *d*; erunt ſegmenta Y*m*, *d*Z, inter ſectiones utrinque intercepta, æqualia: nam ducatur diameter CR bifariam ſecans ipſam YZ in *p*; diameter C*r* cum ipſa CR coincidens bifariam ſecabit ipſam *md* in eodem *p*, nam quoniam diametri

diametri ipſis CR, C*r* conjugatæ coincidunt, rectæ ordinatim applicatæ ipſis CR, C*r* ſunt parallelæ, ſed recta Y*p*Z ordinatim applicatur ipſi CR, ergo *mpd* ordinatim applicatur ipſi C*r*, ergo *mp*, *pd* æquantur & proinde ſegmenta Y*m*, *d*Z ſunt æqualia.

Cor. III. Iiſdem manentibus, ſi recta TX ſectione exteriore terminata interiorem contingat in puncto quovis *m*, & ſi per aliud punctum *d* in ſectione interiore, ducatur recta ipſi TX parallela, occurrens ſectioni exteriori in punctis I & V; erit rectangulum I*d*V æquale rectangulo T*m*X ſive quadrato ex T*m*; jungantur enim puncta *m*, *d* rectâ occurrente ſectioni exteriori in punctis Y & Z, & quoniam per Cor. præcedens ſegmenta Y*m*, *d*Z ſunt æqualia, erunt rectangula Y*d*Z, Y*m*Z æqualia, & proinde rectangula I*d*V, T*m*X contenta ſegmentis parallelarum quibus recta YZ occurrit, erunt inter ſe æqualia, Cor. 1. Prop. 18. lib. 1.

Cor. IV. Iiſdem manentibus, ſi duæ rectæ MQ, TX terminatæ ſectione exteriore contingant interiorem in punctis *d* & *m*, erunt inter ſe ut ſemidiametri CF, CA quibus ſunt parallelæ: ducatur enim per contactum *d* recta ipſi TX parallela ſectioni exteriori occurrens in I & V; (per 31. & 40. lib. 1.) rectangulum M*d*Q eſt ad rectangulum I*d*V hoc eſt rectangulum T*m*X (per Cor. præc.) ut quadratum ex CF ad quadratum ex CA, ſed rectangula M*d*Q & T*m*X ſunt quadrata ex M*d* & T*m*, ergo ipſæ M*d*, T*m*, ſive totæ contingentes MQ, TX ſunt inter ſe, ut ſemidiametri CF, CA; ſive ut C*f*, C*a* cum iis coincidentes.

Fig. 2. Cor. V. Aſymptoti ſimilium Hyperbolarum eoſdem angulos comprehendunt: ſint enim duæ Hyperbolæ ſimiles et ſimiliter poſitæ, quarum centrum commune eſt C, et ſint M, *m* vertices diametrorum coincidentium, et A, *a* vertices diametrorum iis conjugatarum, et quoniam ſectiones ſimiles ſunt et ſimiliter poſitæ, diametri CA, *ca* coincident, et erit CM ad C*m*, ut CA ad C*a*; ergo rectæ jungentes A, M et *a*, *m* ſunt parallelæ; ſi igitur per centrum C ducantur duæ rectæ quarum una ſit parallela ipſis AM,

AM, *am*, et altera eas biſariam ſecat, hæ rectæ erunt aſymptoti utriuſque Hyperbolæ per Cor. 3. 38. lib. 1. unde conſtat corollarium.

PROP. II.

Sint duæ Parabolæ EAD, *ead* quarum axes AB, *a*B coincidunt & eandem habent parametrum; dico quod duæ quævis diametri MN, *m*N coincidentes æquales habebunt parametros: & cum ſuis ordinatis æquales angulos comprehendent. Fig. 3.

Pars 1. SINT enim puncta F, *f* foci Parabolarum, et quoniam æqualiter diſtant a verticibus axium, per hypoth. et Def. foci, erit F*f* diſtantia inter focos æqualis ipſi A*a* diſtantiæ inter vertices axium, hoc eſt, ipſi M*m* diſtantiæ inter vertices diametrorum MN, *m*N per Cor. Prop. 10. lib. 3. ergo rectæ MF, *mf*, erunt ſibi invicem parallelæ et æquales (33. 1.) et proinde diametri coincidentes MN, *m*N æquales habent parametros, Cor. 1. Prop. 25. lib. 2.

Pars 2. Producatur diameter MN ultra verticem ad K, et propter parallelas MF, *mf*, erunt anguli KMF, K*mf* æquales, ideoque rectæ ML, *m*O hos angulos bifariam ſecantes erunt parallelæ (29. 1.) ſed Parabolas contingent (per Prop. 15. lib. 2.) ergo diametri coincidentes MN, *m*N æquales angulos cum contingentibus ML, *m*O et proinde cum ordinatis ſuis comprehendunt. *Q. E. D.*

Ut circuli ſolummodo in magnitudine diametrorum differunt, ſic & Parabolæ differunt ſolummodo in magnitudine parametrorum principalium & proinde omnes Parabolæ ſicut omnes circuli dicendæ ſunt ſimiles.

Cor. I.

Cor. I. Si recta TO Parobolâ exteriore terminata, interiorem contingat in quovis puncto *m*, in iſto puncto bifariam ſecabitur; ducatur enim per contactum diameter MN Parabolæ exterioris, & ex parte ſecunda hujus, conſtat rectam TO ipſi MN ordinatim eſſe applicatam.

Cor. II. Vel ſi recta ED Parabolâ exteriore terminata, interiori occurrat in punctis *e*, *d*, erunt ſegmenta E*e*, *d*D æqualia; ducatur enim diameter MN ipſam ED bifariam ſecans in P, & quoniam per partem ſecundam hujus, erit recta *ed* ordinatim applicata diametro *m*N cum ipſa MN coincidenti, erunt *e*P, P*d* æquales, ideoque ſegmenta E*e*, *d*D inter Parabolas ſunt æqualia.

Cor. III. Si recta TO Parabolâ exteriore terminata contingat interiorem in puncto quovis *m*, & a quovis puncto *d*, in Parabola interiore ducatur recta ipſi TO parallela, occurrens Parabolæ exteriori in punctis E, D, erit rectangulum E*d*D æquale rectangulo T*m*O ſive quadrato ex T*m*; jungendo *m*, *d*, probatur ex Cor. præc. eodem modo, quo Cor. 3. Propoſitionis præcedentis.

Cor. IV. Si duæ rectæ TO, MQ Parabolâ exteriore terminatæ interiorem contingant in punctis *m* & *d*, erunt ipſarum quadrata inter ſe, ut parametri diametrorum MN, OR quæ per puncta contactus tranſeunt; nam hæ rectæ ordinatim applicantur diametris MN, OR per Cor. 1. & per Cor. Prop. 10. lib. 3. abſciſſæ M*m*, O*d* ſunt æquales; ergo quadrata ordinatarum T*m*, M*d* ſunt inter ſe ut parametri diametrorum quibus applicantur, unde conſtat Corollarium.

Cor. V. Si duæ rectæ TO, MQ Parabolâ exteriore terminatæ interiorem contingant, abſcindent a Parabola exteriore æqualia ſegmenta TMO, MOQ; nam ductis diametris M*m*N, O*d*R per puncta contactus, erunt abſciſſæ M*m*, O*d* æquales, ergo ſegmenta Parabolica TMO, MOQ erunt æqualia per Cor. 1. 13. lib. 3.

DEFI-

DEFINITIONES II, III.

II. SI recta AD, ita dividatur in punctis C, B, ut ſit tota AD ad utramvis partem extremam AC, ut reliqua extrema BD, ad mediam CB, recta AD *Harmonicè diviſa* dicitur. Fig. 4.

Cor. I. Liquet partem mediam CB eſſe utrâvis parte extremâ minorem.

Cor. II. Datis diviſionis harmonicæ duobus extremis punctis A,D, & mediorum uno C, invenitur quartum punctum B, ita ut pars data AC ſit extremarum una; nempe dividendo ſegmentum CD in puncto B, ita ut pars CB, ipſi AC proxima, ſit ad BD, ut AC, ad AD.

Cor. III. Vel datis duobus mediis punctis C, B, & extremorum uno A, invenitur alterum extremum D; ducatur enim a puncto A recta AV, et ut extrema pars AC eſt ad partem mediam CB, ita ſit AV ad ſegmentum VQ ſumptum verſus A; jungatur BQ & ducatur recta VD ipſi QB parallela occurrens ipſi ACB productæ in D, et erit AD ad BD, ut AV ad QV, hoc eſt per Conſtructionem, ut AC ad CB.

Cor. IV. Ex Corollario ſecundo patet, quod in diviſione quavis harmonica, manentibus duobus punctis extremis A, D, et puncto medio C, & unâ parte extremâ AC; nullum punctum præter B inveniri poteſt, quod ſit quartum punctum iſtius diviſionis. Et ex Corollario tertio patet, quod manentibus duobus punctis mediis C, B, & puncto extremo A, et parte mediâ CB, nullum punctum præter D inveniri poteſt, quod ſit quartum punctum iſtius diviſionis.

Defin. III. Si recta harmonice dividatur in punctis *a*, *c*, *b*, *d*, et utcunque producantur per puncta diviſionis quatuor rectæ V*a*, V*c*, V*b*, V*d*, vel inter ſe parallelæ, vel in eodem puncto V convenientes; hæ rectæ dicuntur *Harmonicales*. Fig. 5.

Y LEMMA

LEMMA I.

Fig. 4. SINT rectæ V*a*, V*c*, V*b*, V*d* harmonicales in eodem puncto V convenientes; ſi quævis recta, uni iſtarum V*d* parallela, tribus reliquis occurrat in punctis E, C, F, bifariam ſecabitur in puncto intermedio C. Vel ſi quævis quatuor harmonicales utcunque occurrant rectæ in punctis A, C, B, D, hæc recta in iſtis punctis harmonice ſecabitur.

Pars. 1. Per punctum intermedium C ducatur recta parallela rectæ *ad*, a qua harmonicales formantur, ipſis occurrens in punctis A, B, D, patet hanc rectam, dividi in eadem ratione, in qua dividitur recta *ad*, hoc eſt, dividi harmonice in punctis, A, C, B, D; eſt igitur AD ad AC, ut BD ad CB, propter vero VD, EC parallelas, eſt VD ad EC (ut AD ad AC, hoc eſt, ut BD ad CB, hoc eſt) ut eadem VD ad CF (propter VD, CF parallelas,) ergo æquales ſunt EC, CF.

Pars 2. Occurrat nunc quævis recta quatuor harmonicalibus in punctis A, C, B, D, & ſi iſtæ harmonicales ſint inter ſe parallelæ, ſatis conſtat propoſitum (ex Cor. Prop. 2. 6.) ſi vero occurrant ſibi invicem in V; per punctorum mediorum alterutrum C ducatur ECF parallela rectæ VD, quæ tranſit per punctum extremum D a puncto C remotiore, duabus reliquis occurrens in E, F; per partem primam, erunt EC, CF æquales, & eſt AD ad AC, ut VD ad EC ſive CF, hoc eſt, ut BD ad CB: ergo eſt AD ad AC, ut BD ad CB. *Q. E. D.*

PROP.

PROP. III.

Ocurrant ſibi invicem duæ rectæ AB, AC contingentes ſectionem conicam vel ſectiones oppoſitas et ducatur BC jungens contactus; ſi per A occurſum contingentium ducatur recta occurrens ſectioni vel ſectionibus in punctis E, K & jungenti contactus in O, harmonice ſecabitur in iſtis punctis A, E, O, K. Fig. 5, 6.

Caſ. 1. PRIMO ſit recta per A ducta non diameter, per puncta E & K ducantur rectæ, parallelæ ipſi BC jungenti contactus, occurrentes contingentibus in D, G & H, M, et ſectioni vel ſectionibus in F et L; per A ducatur diameter occurrens rectis DG, BC, HM in punctis N, P, Q. & quoniam bifariam ſecat rectam BC in P (Cor. 1. 25. lib. 1.) bifariam ſecabit ipſas DG, HM in N et Q. & quoniam EF, KL ſectione vel ſectionibus terminatæ ut ſint ipſi BC parallelæ, bifariam ſecabuntur in N & Q. ergo ſegmenta DE, FG & ſegmenta HK, LM erunt æqualia, & proinde rectangula DEG, HKM erunt æqualia rectangulis EDF, KHL.

Propter parallelas DG, HM, erit HK ad DE, ut KM ad EG, ergo ſimilia ſunt rectangula HKM, DEG, et proinde hæc rectangula ſive rectangula KHL, EDF ſunt inter ſe, ut quadrata ex HK, DE, ſive ut quadrata ex HA, DA; ſed eadem rectangula KHL, EDF ſunt inter ſe, ut quadrata ex HB, BD, (per Cor. 4. 18. lib. 1.) ergo quadrata ex HA, DA ſunt inter ſe ut quadrata ex HB, BD, ideoque eſt HA ad DA, ut HB ad BD (22. 6.) & igitur, propter parallelas, eſt KA ad EA, ut KO ad OE; ergo recta AK harmonice ſecatur in punctis A, E, O & K.

Caſ. 2. Cum rectæ contingant eandem ſectionem & recta per A ducta ſit diameter; occurrat hæc ipſi BC in P & ſectioni vel ſectionibus oppoſitis in punctis R, T, rectæ per hæc puncta ductæ ipſi BC parallelæ erunt contingentes; occurrant vero contingenti Fig. 5.

AB in S & V; propter parallelas erit VA ad SA, ut VT ad SR, hoc eſt ut VB ad BS (per Cor. 5. 18. lib. 1.) ergo propter parallelas eſt TA ad RA, ut TP ad PR: ergo diameter per A ducta harmonice ſecatur in punctis A, R, P, T. *Q. E. D.*

Cor. Patet ex demonſtratione hujus, quod ſi contingens VBS occurrat duabus contingentibus parallelis VT, SR in punctis V, S, & jungenti contactus in A, ſecabitur harmonice in punctis V, B, S, A, ſciz. in puncto contactus et punctis in quibus contingentibus & jungenti contactus occurrit.

PROP. IV.

Si tres rectæ contingant ſectionem vel oppoſitas ſectiones; quævis ipſarum harmonice ſecabitur, ſciz. in puncto contactus, & punctis in quibus occurrit reliquis contingentibus, & rectæ jungenti ipſarum contactus.

Si duæ ex contingentibus ſint parallelæ & tertia occurrat rectæ jungenti ipſarum contactus; conſtat propoſitum per Cor. præcedens.

Fig. 7. Si vero tres rectæ AB, AC, MD, contingentes ſectionem vel ſectiones oppoſitas in punctis B, C, K, inter ſe conveniant in A, D, M, et juncta BC occurrat ipſi MD ſi opus productæ in H, erit HM ad HD, ut MK ad KD.

Per punctum D, interſectionem contingentium DK, DC, ducatur recta alteri contingenti AB parallela, & ſectionem, vel utramque ſectionem ſecans in punctis E, G & occurrens ipſi BC in F, rectangulum EDG erit æquale quadrato ex DF (53. lib. 1.) eſt autem propter parallelas, quadratum ex HM ad quadratum ex HD, ut quadratum ex MB ad (quadratum ex DF ſive) rectangulum EDG, hoc eſt (per Cor. 6. 18. lib. 1.) ut quadratum ex MK ad quadratum ex KD, eſt ergo HM ad HD, ut MK ad KD. *Q. E. D.*

Cor.

Cor. I. Hinc ſi recta BC jungens puncta contactus contingentium MB, DC occurrat alteri contingenti MKD in H, et per ejus contactum K ducatur recta occurrens ipſi BC in L, parallela ipſis AB AC ſi modo ipſæ ſint parallelæ, aliter tranſiens per ipſarum occurſum A, harmonice ſecabitur recta BC in punctis H, B, L, C. Nam ſi ipſæ MB, DC concurrant in A, jungatur HA, & quoniam per propoſitionem contingens MKD harmonice ſecatur in punctis H, M, K, D; erunt rectæ AH, AM, AK, AD harmonicales: ergo per part. 2. Lem. præc. recta HBC harmonice ſecatur in H, B, L, C.

Si vero contigentes MB, DC, ſint parallelæ, contingens MKD harmonice ſecatur in punctis H, M, K, D per Cor. Prop. præc. ergo (propter MB, KL, DC parallelas) recta HBC harmonice ſecatur in punctis H, B, L, C.

Cor. II. Hinc ſi dentur poſitione duæ rectæ MB, DC contingentes ſectionem in punctis datis B, C, et detur quodvis punctum K in ſectione; inveniri poteſt poſitio contingentis, quæ tranſit per K. Ducatur enim per K recta occurrens ipſi BC in L, et parallela ipſis MB, DC, ſi ſint parallelæ, aliter tranſiens per ipſarum occurſum A, ſi LB, LC ſint æquales, recta AKL eſt diameter, & igitur contingens per K ducta, erit parallela ipſi BC. Si vero LB ſit ipſi LC minor, producatur LB ad H, ita ut HB ſit ad HC, ut BL ad LC (Cor. 3, ad Def. 2.) erit juncta HK contingens; nam ſi non, per K ducatur contingens, neceſſario occurret alicubi LB productæ verſus H, puta in N. Tum per coroll. præced. recta HC, quæ per conſtructionem harmonice ſecatur in H, B, L, C, harmonice quoque ſecabitur in N, B, L, C, contra Cor. 4. Def. 2. eſt igitur recta HK contingens.

PROP.

PROP. V.

Fig. 8, 9, 10, 11 12. In diametro ſectionis conicæ DR ſumantur duo puncta A, B, (ad diverſas partes centri ſi fuerit DR diameter ſecunda Hyperbolæ, ſecus ad eaſdem) ita ut in Ellipſi aut Hyperbola, ſemidiameter CD media ſit proportionalis inter CA, CB, diſtantias punctorum a centro C; in Parabola vero ut DA, DB diſtantiæ punctorum a vertice D ſint inter ſe æquales; & per hæc puncta A, B ducantur rectæ AT, BQ paralellæ ordinatim applicatis diametro DR: ſi per alterutrum punctorum A vel B, puta B, ducatur recta ſectionem vel ſectiones oppoſitas ſecans in duobus punctis O & P; FO, FP, quæ in iſtis punctis ſectionem, vel ſectiones contingunt, erunt vel parallelæ rectæ AT, per alterum punctum A ductæ, vel ad iſtam rectam ſibi invicem occurrent.

SI ſecans per B ducta coincidat cum diametro DR, patet contingentes per vertices ejus ductas eſſe paralellas rectæ AT, quia ſunt parallelæ ordinatim applicatis diametro DR.

Si vero punctum B ſit intra ſectionem, vel inter Hyperbolas & ſecans coincidat cum ipſa BQ & occurrat ſectioni vel utrique ſectioni in Q & S, patet congentes per Q & S ductas, ſibi invicem occurrere in ipſo puncto A, quia ſciz. in Ellipſi vel Hyperbola, CB, CD, CA ſunt proportionales & in Parabola DA, DB ſunt æquales.

Ducatur autem ſecans OP, quæ nec coincidat cum diametro DR nec cum recta BQ, tum contingentes per O & P ductæ ſibi invicem alicubi occurrent ut in F; per punctum F ducatur diameter CEF ipſam OP bifariam ſecans in G (26. lib. 1.) a & puncto D, vertice diametri

diametri DR inter puncta A & B, ducatur DK ordinatim applicata diametro CE, et DH ſectionem vel ſectionem conjugatam contingens, & occurrens diametro CE in H, erit DH ipſi AT parallela.

Quoniam igitur cum ſectio ſit Ellipſis, vel Hyperbola (per 48. & 49. lib. 1.) utrumque rectangulum GCF, KCH eſt æquale quadrato ex ſemidiametro CE, erunt hæc rectangula inter ſe æqualia, & proinde eſt CF ad CH, ut CK ad CG (ſive propter parallelas DK, OBG) ut CD ad CB, hoc eſt per hypotheſin, ut CA ad CD: ergo ſi jungatur AF, quoniam CF eſt ad CH, ut CA ad CD, erit AF parallela ipſi DH, ſive ipſi AT; ergo punctum F eſt in recta AT.

Cum vero ſectio ſit Parabola, eſt GE ipſi EF & KE ipſi EH æqualis (per 47. lib. 1.) ergo HF eſt æqualis (ipſi GK ſive, propter parallelas DK, OBG, ipſi BD, hoc eſt per hypotheſin) ipſi DA: ergo quoniam HF, DA ſunt æquales & parallelæ, ſi jungatur AF, erit hæc parallela ipſi DH, ſive ipſi AT: ergo punctum F eſt in recta AT. *Q.E.D.* Fig. 12.

Cor. I. Iiſdem manentibus, ſi per alterutrum punctorum A vel B, puta B ducatur recta occurrens ſectioni vel ſectionibus in duobus punctis M, L, & rectæ AT, per alterum punctum A ductæ, in F; harmonice ſecabitur, ſciz. in punctis F, M, B, L.

Sit primo B punctum intra ſectionem & ducatur diameter CE Fig. 8, tranſiens per F, & per B ducatur recta ordinatim applicata ipſi 11. CE, occurrens ſectioni vel ſectionibus in punctis O, P; contingentes per O, P, ductæ concurrent alicubi in diametro CEF (per Cor. 2. 26. lib. 1.) concurrent etiam alicubi in recta AT, per hanc Prop. igitur concurrent in puncto F, ac proinde recta per B ducta ſecatur harmonice (per 3. huj.) in punctis F, M, B, L. Si vero B Fig. 9, ſit punctum extra ſectionem & recta AT occurrat ſectioni, vel 10. ſectionibus in punctis T, N; cum (ex Prop. 52. lib. 1.) patet junctas

junctas BT, BN eſſe contingentes, conſtat propoſitum per Prop. 3. huius. Suppl. rectam LBM in Fig. 9, 10, 12.

Cor. II. Si detur poſitione ſectio conica, & detur punctum quodvis B non centrum ſectionis nec in aſymptoto Hyperbolæ; duæ quævis rectæ contingentes ſectionem vel oppoſitas ſectiones, & ductæ per terminos ſecantis tranſeuntis per B, ſibi invicem occurrent in recta quadam AT, cujus poſitio per hanc Prop. determinatur.

Cor. III. Vel ſi poſitione dentur ſectio conica, & recta quævis AT non diameter ſectionis, & a quovis puncto F in ipſa AT, ducantur duæ rectæ contingentes ſectionem vel ſectiones oppoſitas; recta jungens puncta contactus tranſibit per punctum datum. Nam quoniam poſitione dantur ſectio & recta AT, dabitur poſitione diameter CD, cujus ordinatæ ſunt ipſi AT parallelæ, & ergo dabuntur vertex ejus D & punctum A in quo occurrit ipſi AT, ideoque in diametro CD dabitur punctum B poſitum reſpectu punctorum A & D, ut in propoſitione; ſi a quovis puncto F in ipſa AT ducantur contingentes FO, FP, recta OP jungens ipſarum contactus tranſibit per B. Nam ſi non, duci poterit a puncto B recta ad unum punctum contactus O quæ iterum occurret ſectioni vel ſectioni oppoſitæ in alio puncto; tum contingens per hoc punctum ducta occurreret contingenti FO in recta AT per hanc Prop. hoc eſt, ipſi FO occurreret in F, tres igitur contingentes ſibi invicem occurrerent in F, quod fieri nequit (Cor. 3. 26. lib. 1.) ergo conſtat propoſitum.

PROP.

PROP. VI.

Iiſdem manentibus, ſi per utrumvis punctorum A, vel B, puta B, ducatur recta BOP Hyperbolæ aſymptoto CY parallela, occurrens uni e ſectionibus oppoſitis in O; contingens ducta per punctum O occurret rectæ AT (ductæ ſciz. per alterum punctum A) ad ipſam aſymptoton CY. Fig. 13, 14.

CUM enim in Fig. 13. contingens OF non tranſit per D verticem ſciz. diametri DR inter puncta A, B, non erit parallela ipſi AT, ſed occurret ei productæ verſus aſymptoton CY, & in Fig. 14. manifeſtum eſt contingentem OF ipſi AT occurrere, occurrat igitur OF ipſi AT in F; erit F ad aſymptoton CY.

Nam ſi non, a puncto F duci poteſt (52. lib. 1.) altera recta contingens unam e ſectionibus oppoſitis in puncto quodam X, jungatur OX, & quoniam punctum F, a quo ducuntur contingentes FO, FX, eſt in recta AT & punctum B poſitum eſt reſpectu punctorum A, D, ut in propoſitione præcedente, recta OX tranſibit per punctum B (per Cor. præc.) hoc eſt coincidet cum recta BOP, ergo recta BOP, quæ eſt aſymptoto parallela, occurrit ſectioni, vel ſectionibus in duobus punctis O & X, quod fieri nequit, eſt igitur punctum F ad aſymtoton CY. *Q. E. D.*

Cor. I. Si poſitione detur Hyperbola, & detur punctum F in ejus aſymptoto CY, & a puncto F ducatur recta occurrens Hyperbolæ vel oppoſitis Hyperbolis in duobus punctis N, T; contingentes per hæc puncta ductæ ſibi invicem occurrent in quadam recta OP quæ poſitione dabitur. A puncto F ducatur recta contingens Hyperbolam in puncto O, quoniam a puncto F unica contingens duci poteſt dabitur punctum O, & proinde recta OP ducta ipſi CY parallela poſitione dabitur; occurrant ſibi invicem

vicem contingentes per N, T ductæ in B, erit punctum B ad rectam OP; nam per B ducatur diameter CD & ſit vertex ejus D, & occurrat ipſi NT in A, erunt CB, CD, CA proportionales, & erit AT ordinatim applicata diametro CD, ergo puncta B, D, A & recta NAT ponuntur ut in hac propoſitione; ſi igitur punctum B non ſit in recta OP, duci poteſt per B recta ipſi CY parallela, quæ occurret Hyperbolæ in puncto ab O diverſo, & contingens per iſtud punctum ducta occurret ipſi NAT ad aſymptoton CY, per propoſitionem, ergo ei occurret in F & igitur duæ contingentes ad aſymptoton occurrent, quod fieri nequit; eſt igitur B occurſus contingentium per N, T ductarum, in recta OP.

Cor. II. Vel ſi poſitione dentur Hyperbola & recta OP ipſius aſymptoto CY parallela; ſi a quovis puncto B in ipſa OP ducantur duæ rectæ, Hyperbolam, vel Hyperbolas oppoſitas contingentes in duobus punctis N, T; recta jungens iſta puncta tranſibit per punctum datum in aſymptoto CY cui recta OP eſt parallela. Ducatur diameter CD per B, occurrens ipſi NT in A, & per punctum O, in quo recta OP Hyperbolæ occurrit, ducatur contingens occurrens aſymptoto CY in F, & quoniam proportionales ſunt CB, CD, CA & recta NAT ſit ordinatim applicata diametro CD, contingens OF occurrit ipſi NAT ad aſymptoton CY, per hanc Prop. ergo recta jungens contactus N, T tranſibit per punctum F: ſed propter OP poſitione datam, dabitur punctum O & proinde contingens OF poſitione datur, occurrit autem ipſi CY poſitione datæ in F, eſt igitur punctum F datum.

Cor. III. A puncto quovis F in Hyperbolæ aſymptoto CY, ducatur recta contingens Hyperbolam in O & per O ducatur recta OP ipſi CY parallela: ſi per punctum F ducatur recta ſecans Hyperbolam vel Hyperbolas in punctis N, T, & occurrens ipſi OP in M, ſecabitur harmonice in punctis N, M, T, F.

Nam

Nam contingentes NB, TB ductæ per puncta N & T inter ſe convenient ad rectam OP, per Cor. 1. occurrat contingens OF ipſis NB, TB in E, G; quoniam per Prop. 4. hujus, contingens OF harmonice ſecatur in F, G, O, E, erunt BF, BG, BO, BE harmonicales: igitur recta NTF harmonice ſecatur in punctis N, M, T, F, per Part. 2. Lem. 1.

Cum rectæ NB, TB contingant Hyperbolas oppoſitas erit aliquando una ipſarum ut NB parallela contingenti OF, tum erit juncta ON diameter, & quia diameter BCA bifariam ſecat ipſam TN in A, propter OC, CN ut & TA, AN æquales, erit juncta OT parallela ipſi BCA, ergo quoniam BOM bifariam ſecatur in O (Cor. 2. 54. lib. 1.) erit MT æqualis ipſi TA ſive AN, & ſimiliter propter parallelas OF, BN, erit MF æqualis ipſi FN, ergo TF, FA æquantur, eſt igitur TA ſive MT dupla ipſius TF, ideoque eſt MN ad FN, ut MT ad TF, ergo conſtat propoſitum. FIG. 14.

PROP. VII.

Iiſdem manentibus, ſi per utrumvis punctorum A vel B, ducatur ad rectam per alterum punctum ductam, recta aſymptoto Hyperbolæ parallela, ab Hyperbola bifariam ſecabitur. Fig. 15.

PRIMO, ducatur per punctum A extra Hyperbolam recta aſymptoto CY parallela, occurrens rectæ BQ in P et Hyperbolæ in O; quoniam proportionales ſunt CA, CD, CB et recta BQ occurrit Hyperbolæ in punctis Q, S et eſt ordinatim applicata diametro CD, erunt junctæ AQ, AS contingentes et proinde recta AP bifariam ſecatur in O per Cor. 2. 54. lib. 1.

Secundo, ducatur per punctum B intra Hyperbolam, recta aſymptoto CY parallela, occurrens ipſi AT in F & Hyperbolæ in M, bifariam ſecabitur BF in M: nam ducatur AOP ipſi

CY parallela, ut in caſu præcedente, & per O ducatur recta ipſi BQ parallela, occurrens diametro CDR in G & rectæ BF in L; propter parallelas erit BP æqualis ipſi OL, & propter AP duplam ipſius AO, erit (BP hoc eſt) OL dupla ipſius OG; ergo OL biſariam ſecatur a diametro CDR in G: ſed OL eſt iſti diametro ordinatim applicata per conſtructionem, & terminus ejus O eſt in Hyperbola, ergo terminus ejus alter L eſt in eadem Hyperbola; ergo recta OGL occurrit ipſi BF ad Hyperbolam, hoc eſt, in puncto M, & igitur, propter parallelas BP, MO, FA & æquales PO, OA, erunt BM, MF æquales.

PROP. VIII.

Si in ſectione conica vel in oppoſitis ſectionibus inſcribantur duæ rectæ, non inter ſe parallelæ, & termini ipſarum quatuor rectis jungantur; harum interſectiones, & duæ interſectiones contingentium, quæ per terminos utriuſque inſcriptæ ducuntur, erunt omnes quatuor in recta linea.

Fig. 16. SINT AC, BD duæ rectæ inſcriptæ, quæ ſi opus productæ concurrant in E, & junctæ AD, BC concurrant in F, junctæ vero AB, DC concurrant in G, & contingentes per A, C ductæ concurrant in H, quæ vero per B, D ducuntur concurrant in K; erunt quatuor puncta F, G, H, K in recta linea.

Nam per E ducatur NO diameter, ſectionis & (in Ellipſi & Hyperbola) diſtantiæ puncti E a centro N, ipſique ſemidiametro NO, ſumatur tertia proportionalis NP, ponenda ut in Prop. 5. hujus dictum fuit; in Parabola vero diſtantiæ puncti E a vertice O fiat æqualis OP, & in utroque caſu per punctum P ducatur recta PQ parallela ordinatim applicatis diametro NO; concurſus contingentium AH, CH & contingentium BK, DK erunt in recta PQ

PQ (per Prop. 5. huj.) occurrat recta PQ ipſis AC, BD (ſi opus productis) in L, M; tum recta AC in punctis A, L, C, E, & recta BD in punctis B, M, D, E, harmonice ſecabuntur (per Cor. 1. Prop. 5. huj.) occurrat juncta CB, ipſi PQ in F, & ſi juncta AD non tranſeat per F, jungatur DF occurrens ipſi AC in X, & quoniam B, M, D, E ſunt puncta diviſionis harmonicæ ſi jungatur FE, erunt FE, FD, FM, FB harmonicales, ergo recta AC iis occurrens in punctis X, L, C, E, harmonice in iſtis punctis ſecabitur (per Par. 2. Lem. 1.) contra Cor. 4. ad Def. 2. quia ſecta eſt harmonice in punctis A, L, C, E: ergo juncta AD tranſit per F; deinde junctâ AB occurrente ipſi PQ in G, oſtendetur eodem prorſus modo junctam CD tranſire per G; ergo quatuor puncta H, K, F, G ſunt in recta linea ſciz. PQ. *Q. E. D.*

Cor. I. Si vero rectæ AB, CD jungentes terminos inſcriptarum ſint inter ſe parallelæ, erunt parallelæ ipſi PQ in qua concurrunt contingentes per terminos inſcriptarum ductæ; nam ſi una ipſarum AB occurrat ipſi PQ in aliquo puncto G, tum ut prius oſtendi poteſt junctam DG tranſire per C, ergo CD ipſi AB occurreret in G contra hypotheſin, ergo conſtat propoſitum.

Cor. II. Si ſectioni vel ſectionibus inſcribantur duæ rectæ inter ſe parallelæ, contingentes ductæ per terminos utriuſvis parallelæ concurrent ad diametrum parallelas biſecantem (Cor. 2. Prop. 26. lib. 1.) & manifeſtum eſt rectas terminos parallelarum jungentes ad eandem diametrum concurrere.

PROP.

PROP. IX.

Fig. 17, 18. Si recta ſecans ſectionem vel ſectiones oppoſitas in duobus punctis P, Q occurrat directrici ſectionis DX in B, & a foco F, ipſi DX propiore, ducantur tres rectæ ad puncta P, Q, B; recta FB ad directricem ducta biſariam ſecabit angulum QFP, contentum reliquis ductis, cum puncta P, Q ſint in oppoſitis ſectionibus, angulum autem KFP qui angulo QFP deinceps eſt, cum P, Q ſint in eadem ſectione.

DUCANTUR enim a punctis Q, P perpendiculares QM, PN ad directricem, & erit QB ad PB, ut QM ad PN, hoc eſt, ut QF ad PF (per Cor. 3. Prop. 11. lib. 2.) ergo cum puncta Q, P ſint in oppoſitis ſectionibus recta FB biſariam ſecat angulum QFP per 3. 6. Cum vero ſint in eadem ſectione, ducatur a puncto P recta ipſi QF parallela occurrens ipſi *FB in R*, & erit QF ad PR, ut QB ad PB, ſive QF ad PF ut prius, ergo æquales ſunt PR, PF, ideoque angulus BFP æqualis eſt angulo PRF ſive angulo alterno BFK, ergo recta FB biſariam ſecat angulum KFP qui angulo QFP eſt deinceps. *Q. E. D.*

Fig. 18. Cor. I. Hinc, datis tribus punctis P, Q, V, in ſectione conica & foco ejus F; inveniri poteſt axis per focum tranſiens poſitione & magnitudine. Jungantur enim puncta P, Q, & ducantur FP, FQ & recta FR biſariam ſecans angulum, qui deinceps eſt angulo PFQ, & occurrens ipſi QP productæ in B, erit punctum B in directrice; & ſimiliter junctis duobus aliis punctis Q, V, inveniatur aliud punctum in directrice, & ducatur directrix DX; tum a foco & puncto in ſectione P dimittantur ad directricem perpendiculares FD, PN; ſecetur FD ita in A, ut FA ſit ad AD, ut

ut PF ad PN: erit A vertex axis (11. lib. 2.) & ſi æquales ſint FA, AD, ſectio erit Parabola; ſi vero non, ſumatur SF ad SD, ut FA ad AD, erit S alter vertex axis; & ſi FA major ſit ipſâ AD, punctum S ſumendum eſt ad eas partes foci ad quas eſt punctum A, ad partes autem contrarias, ſi FA ſit minor ipſâ AD, & in priore caſu ſectio erit Hyperbola, et in poſteriore Ellipſis.

Cor. II. Hinc etiam, datâ poſitione directrice DX, et datis foco F huic directrici propiore et puncto in ſectione E; patet methodus ducendi rectam quæ ſectionem contingat in puncto E; per puncta E, F ducatur recta EFO, & huic perpendicularis ducatur FB occurrens directrici in B, erit juncta EB contingens; nam ſi non, occurrat EB ſectioni iterum in T, & juncta TF producatur ad Y; per hanc Prop. recta FB bifariam ſecat angulum EFY qui deinceps eſt angulo EFT, ergo angulus YFB æqualis eſt angulo EFB hoc eſt angulo OFB, quod eſt abſurdum: ſimiliter in Fig. 17. oſtendetur rectam EB non iterum occurrere ſectioni vel ſectioni oppoſitæ, ergo EB eſt contingens. Si vero ipſa EFO ſit directrici perpendicularis, recta per E ducta, parallela directrici, erit contingens, ut patet. Fig. 18.

Cor. III. Hinc ſi recta EB contingens ſectionem occurrat directrici ejus DX in B, & a contactu E ducatur EF ad focum ipſi DX propiorem; erit juncta FB perpendicularis ipſi EF; nam ſi non, ducatur perpendicularis occurrens directrici in N, juncta EN erit quoque contingens per. Cor. præced. quod eſt abſurdum.

Cor. IV. Hinc, ſi recta quævis EG jungens contactus duarum contingentium BE, BG tranſeat per focum F; recta FB a foco ad concurſum contingentium ducta erit perpendicularis jungenti contactus. Nam ſit DX directrix ipſi F propior, & ſit A vertex axis tranſverſi inter F & rectam DX, tum quia puncta F, A, D poſita ſunt & recta DX ducta eſt ut in Prop. 5. hujus dictum fuit, & EG tranſit per F, punctum B concurſus contingentium erit in directrice DX; ergo FB eſt ipſi EG perpendicularis per Cor. præcedens.

PROP

PROP. X.

Fig. 17. 18. Si duæ rectæ HP, HQ contingant ſectionem conicam vel ſectiones oppoſitas; recta HF, quæ per concurſum contingentium & alterum focorum F ducitur, biſariam ſecabit angulum QFP, comprehenſum rectis, quæ a punctis contactus ad eundem focum ducantur, cum rectæ HP, HQ contingunt eandem ſectionem, angulum vero KFP qui deinceps eſt angulo QFP, cum contingunt ſectiones oppoſitas.

SIT recta DX directrix ſectionis foco F propior, cui jungens contactus QP occurrit in B, et axis in D, & ſit A vertex axis inter F et D; per H concurſum contingentium ducatur diameter occurrens ipſi QP in L, et ſit vertex ejus V, occurrat recta HF ſectioni in E; et quoniam in Ellipſi aut Hyperbola quarum centrum ſit C, CF, CA, CD, & etiam CH, CV, CL, ſunt proportionales, *& in* Parabola FA, AD et etiam LV, VH ſunt æquales, et rectæ DX, LP ſunt ordinatis diametorum DF, HL parallelæ, et recta HF tranſit tam per punctum F, quam per punctum H, prout hæc recta ſectioni iterum occurat in G, vel ſolummodo in E, (cum ſit aſymptoto parallela,) contingens per E ducta occurret vel contingenti ductæ per G vel aſymptoto ipſi HF parallelæ, tam ad rectam DX, quam ad rectam QP (per 5 & 6. hujus) ergo contingens ducta per E occurret directrici in B; igitur juncta FB erit perpendicularis ipſi EFG (per Cor. 3. præced.) ergo anguli EFB, GFB ſunt æquales; ſed (productâ QF ad K) erit in Fig. 18. angulus PFB æqualis KFB; (per Prop. præc.) igitur angulus PFG eſt æqualis angulo EFK ideoque angulo QFG, & ſimiliter in Fig. 17. quoniam anguli PFB, QFB ſunt æquales, angulus PFG eſt æqualis angulo QFE ideoque angulo KFG: ergo conſtat propoſitum. *Q. E. D.*

PROP.

PROP. XI.

Si duæ ſectiones conicæ, ſe invicem in uno puncto contingant (hoc eſt ſi in eodem puncto communem habeant contingentem) in tribus aliis punctis non occurrrent.

OCCURRANT ſibi invicem duæ ſectiones in puncto A & utraſque ſectiones contingat in hoc puncto recta GA; hæ ſectiones non occurrent in tribus punctis præter A. Fig. 19.

Nam ſi fieri poteſt, occurrant ſibi invicem in punctis B, C, D, jungantur hæc puncta tribus rectis, & primo ſit nulla ex iis ipſi GA parallela, producatur una ex his rectis BC ut occurrat ipſi GA in G, & a reliquo puncto communi D ducatur recta parallela communi contingenti GA, occurrens ipſi GBC in N & ſectionibus in punctis O, P; tum utrumque rectangulum DNO, DNP erit ad quadratum ex GA, ut rectangulum CNB ad rectangulum BGC (per Cor. 3. 18. lib. 1.) ergo rectangula DNO, DNP ſunt æqualia, & proinde puncta P, et O, coincidunt: ergo ſectiones in quinque punctis ſibi invicem occurrunt, contra Cor. 3. 56. lib. 1. Vel ſi recta DN contingat unam ſectionem in D, & alteri iterum occurrat in O, eodem modo oſtendetur quadratum ex DN æquale eſſe rectangulo DNO, quod eſt abſurdum. Vel ſi recta DN utraſque ſectiones contingat in D, quoniam eſt parallela contingenti GA, juncta DA eſſet diameter utriuſque ſectionis & ergo ſi a puncto communi B ducatur recta ordinatim applicata communi diametro DA, alter terminus hujuſce ordinatæ erit utrique ſectioni communis & proinde ſectiones in qninque punctis ſibi invicem occurrunt, quod fieri nequit.

Si vero CD, jungens duo puncta utrique ſectioni communia, ſit parallela communi contingenti GA; tum recta per contactum

A ducta bifariam ſecans ipſam CD in L eſſet utriuſque ſectionis diameter; ſi ducatur igitur a reliquo puncto communi B, recta ordinatim applicata diametro AL, terminus alter hujuſce ordinatæ erit in utraque ſectione, et proinde hæ ſectiones in quinque punctis occurrunt, quod fieri nequit. Conſtat igitur propoſitum.

PROP. XII.

Si duæ ſectiones conicæ ſe invicem in duobus punctis contingant; in alio puncto non ſibi invicem occurrent.

Fig. 20. CONTINGANT ſe invicem duæ ſectiones conicæ in punctis A, B, & primo, occurrant ſibi invicem in G communes contingentes per A & B ductæ, per occurſum contingentium ducatur recta GF junctam AB bifariam ſecans, erit hæc diameter utriuſque ſectionis (26. lib. 1.) ſi igitur hæ ſectiones aliud habeant punctum commune D, ducatur recta DL ordinatim applicata communi diametro GF, alter terminus hujuſce ordinatæ L erit in utraque ſectione, & proinde hæ ſectiones ſe invicem contingentes in puncto A, in tribus aliis punctis B, D, L, ſibi invicem occurrerent contra præcedentem: vel ſi punctum C in diametro GF eſſet utrique ſectioni commune, tum recta per C ducta ipſi BA parallela, utramque ſectionem in puncto C contingeret (Cor. 8. 25. lib. 1.) occurrat hæc contingens contingenti GB in E; tum recta EH per E ducta bifariam ſecans junctam BC erit communis diameter utriuſque ſectionis, & ſi igitur a reliquo puncto communi A ducatur ad hanc diametrum ordinatim applicata, terminus ejus alter erit in utraque ſectione contra præcedentem, ut prius: ergo nullum eſt punctum ſectionibus commune præter puncta contactus A, B.

Secundo ſi communes contingentes per A & B ductæ ſint parallelæ; erit juncta AB utriuſque ſectionis diameter, ſi igitur haberent aliud punctum

punctum commune præter puncta contactus, tum ab hoc puncto communi, ductâ ad communem diametrum ordinatim applicatâ, ut prius oſtendetur ſectiones habere quartum punctum commune contra præcedentem; ideoque in omni caſu duæ ſectiones ſe invicem in duobus punctis contingentes in alio puncto non ſibi invicem occurrent. *Q. E. D.*

PROP. XIII.

Si circulus ſectionem conicam vel ſectiones oppoſitas in duobus punctis contingat; recta jungens contactus erit axi ſectionis ordinatim applicata.

Et ſi ordinatim ſit applicata axi ſectionis qui in Ellipſi & Hyperbola eſt tranſverſus, circulus cadet totus intra ſectionem; ſi vero ſit ordinatim applicata axi ſecundo Ellipſeos aut Hyperbolæ; circulus cadet totus extra Ellipſim, vel extra utramque Hyperbolam.

CUM circulus contingat in duobus punctis Ellipſim aut opoſitas Hyperbolas, ſi communes contingentes ſint parallelæ, recta jungens contactus, erit tam ſectionis, quam circuli diameter, et quia propter circulum, hæc diameter eſt contingentibus perpendicularis erit axis ſectionis conicæ, ut patet ex Cor. 2. 7. lib. 2. et ſi ſit axis tranverſus, circulus cadet totus extra Ellipſim vel utramque Hyperbolam, vel ſi ſit axis ſecundus Ellipſeos, circulus cadet totus intra Ellipſim, per Prop. 8. lib. 2.

Pars. 1. Si vero circulus HRET contingat ſectionem vel oppoſitas ſectiones in punctis T, R, & communes contingentes per hæc puncta ductæ ſibi invicem occurrant in S, erit juncta TR axi ſectionis ordinatim applicata. Nam per S occurſum contingentium ducatur recta biſariam ſecans ipſam TR in O; tum quia (propter circulum) contingentes ST, SR ſunt æquales, recta SO erit ipſi FIG. 21. 22.

TR perpendicularis : ſed recta SO, eſt diameter ſectionis conicæ (26. lib. 1.) & hæc diameter eſt axis, quoniam rectam TR ei ordinatim applicatam ad angulos rectos ſecat. Ergo conſtat prima pars propoſiti.

Pars. II. Si circulus HTER contingat ſectionem conicam in punctis T & R, & juncta TR ſit ordinatim applicata axi AB qui in Ellipſi & Hyperbola eſt tranſverſus; erit circulus totus intra ſectionem; centrum hujuſce circuli P erit in axe AB, ut patet; ſit B vertex axis ipſi P propior & occurrat circulus axi AB in puncto E ad eas partes centri P ad quas eſt B, erit PE ipſâ PB minor. Ducatur enim per verticem axis B, contingens BL & per punctum R ducatur recta circulum & ſectionem contingens, occurrens contingenti BL in L; et quoniam in Ellipſi aut Hyperbola axis ſecundus, qui eſt contingenti BL parallelus, minor eſt diametro contingenti RL parallelâ, erit BL minor ipſâ RL (Cor. 31. & Cor. 1. 40. lib. 1.) & in Parabola BL minor eſt ipſâ RL (per Cor. 1. 3. lib. 2. & Cor. 3. 3. lib. 3.) jungantur igitur PL, PR, et quoniam RL circulum contingit, erit angulus PRL rectus, eſt autem angulus PBL rectus; igitur, propter communem hypothenuſam, quadrata ex PB, BL ſimul æqualia ſunt quadratis ex PR, RL ſimul: ſed quadratum ex BL minus eſt quadrato ex RL, ergo quadratum ex PB majus eſt quadrato ex PR: ergo ipſa recta PB major eſt ipſâ PR, hoc eſt ipſâ PE; ergo arcus circuli TER occurrit axi intra ſectionem, & proinde totus iſte arcus eſt intra ſectionem; aliter circulus occurreret ſectioni in alio puncto præter puncta contactus (contra præced.) & cum manifeſtum eſt circulum occurrere axi AB iterum in H puncto intra ſectionem, erit totus arcus THR, & proinde totus circulus intra ſectionem. Eodem prorſus modo oſtendetur circulum cadere totum extra Ellipſim, cum TR jungens puncta contactus ſit ordinatim applicata axi ſecundo.

Quoniam circulus contingens oppoſitas Hyperbolas totus eſt intra angulum contentum communibus contingentibus, patet eum eſſe totum extra utramque Hyperbolam. *Q. E. D.*

Cor.

Cor. I. Si recta quævis TS ſectionem conicam contingat, et a puncto contactus erigatur perpendicularis ad contingentem occurrens axi tranſverſo ſectionis in P, erit ipſa PT recta minima quæ ab eodem puncto P, duci poteſt ad ſectionem; vel ſi occurrat axi ſecundo Hyperbolæ aut Ellipſeos in puncto Q, erit in Hyperbola recta QT minima, & in Ellipſi maxima, quæ ab eodem puncto Q duci poteſt ad ſectionem, ſciz. ad eandem partem axis. Ducatur enim a puncto T ad axem tranſverſum, recta ei ordinatim applicata, occurrens ſectioni iterum in R, & huic axi occurrat contingens TS in S; erit juncta SR contingens (Cor. 2. 26. lib. 1.) & æqualis ipſi ST, & erit juncta PR æqualis ipſi PT: ergo mutuo æquiangula ſunt triangula PTS, PRS & proinde angulus PRS eſt rectus; igitur circulus centro P deſcriptus tranſiens per puncta T & R continget rectas ST, SR & proinde ſectionem in punctis T, & R, & igitur iſte circulus cadet totus intra ſectionem, (per hanc Prop.) et ergo radius circuli PT eſt minima recta, quæ a puncto P duci poteſt ad ſectionem ſciz. ad eandem partem axis. Eodem prorſus modo, cum perpendicularis ad contingentem TS occurrat axi ſecundo Hyperbolæ aut Ellipſeos in Q, oſtendetur circulum radio QT deſcriptum cadere totum extra Hyperbolas aut Ellipſim, ergo conſtat corollarium.

Cor. II. Si recta TR Ellipſi aut Hyperbolâ terminata ſit axi ejus AB ordinatim applicata, et circulus tranſiens per puncta T et R, contingat ſectionem in uno puncto T, eam quoque continget in altero puncto R; nam circuli centrum P, erit in axe ſectionis AB; ducatur per T communis contingens TS axi AB occurrens in S, angulus PTS (propter circulum) erit rectus, et juncta SR ſectionem continget, junctâ igitur PR, oſtendi poteſt, ut in Cor. præc. quod angulus PRS ſit rectus: ergo circulus continget, rectam RS ac proinde, ipſam ſectionem in puncto R.

PROP.

PROP. XIV.

FIG. 21, 22. Si duo circuli contingant Ellipſim aut Hyperbolam in eodem puncto T & iterum contingant eandem Ellipſim vel oppoſitas Hyperbolas in punctis R, N; rectangulum contentum diametris circulorum erit æquale quadrato quod fit ex diametro ſectionis quæ eſt conjugata diametro per T punctum contactus tranſeunti. Et ſi circulus contingat Parabolam in duobus punctis, quadratum ex ejus diametro erit æquale rectangulo contento parametro axis & parametro diametri per punctum contactus tranſeuntis.

Pars 1. SINT Ellipſeos aut Hyperbolarum axes AB, M*m* & centrum C, rectæ TR, TN jungentes puncta contactus erunt axibus perpendiculares per part 1. Prop. præc. per punctum T in quo uterque circulus ſectionem contingit ducatur communis contingens axibus occurrens in punctis G, S, & ad punctum T erigatur huic contingenti perpendicularis axibus occurrens in P, Q. erunt puncta P, Q centra circulorum (per 1. & 19. 3.) & quoniam diametri ſectionis per contactus tranſeuntes ſunt inter ſe æquales, erunt ipſarum conjugatæ inter ſe æquales ut conſtat ex Prop. 3. & 4. lib. 4. Sit FD diameter ſectionis conjugata ei quæ per contactum T tranſit. Quoniam rectangula triangula TQG, TSP ſunt æquiangula, erit QT ad GT, ut TS ad TP, ideoque rectangulum QTP eſt æquale rectangulo GTS, hoc eſt, quadrato ex CD per Prop. 51. lib. 1. unde liquet pars prima propoſitionis.

Pars 2. Contingat circulus HE Parabolam in punctis T, R erit juncta TR axi Parabolæ perpendicularis ut prius, ideoque parametri diametrorum quæ per puncta contactus tranſeunt erunt inter ſe æquales (Cor. 3. 25. lib. 2.) per contactum T ducatur communis

communis contingens axi occurrens in S & ad punctum T erigatur huic contingenti perpendicularis axi occurrens in P, erit P centrum circuli HE ut prius; occurrat ipſa TR axi Parabolæ in O, & quoniam rectangula triangula OPT, SPT ſunt æquiangula erit OP ad PT, ut PT ad PS, ergo quadratum ex PT eſt æquale rectangulo OPS, hoc eſt, rectangulo contento dimidio parametri axis & dimidio parametri diametri quæ per contactum T tranſit (Prop. 25. lib. 2.) ergo conſtat pars ſecunda propoſitionis.

Cor. I. Manentibus quæ in caſu primo hujus poſita fuerunt, ſemidiameter PT circuli Ellipſim aut Hyperbolam contingentis in duobus punctis & intra ipſam cadentis erit ad CD ſemidiametrum ſectionis conjugatam ei quæ per contactum tranſit, ut CM ſemiaxis ſecundus ad CB ſemiaxem tranſverſum; ducatur enim a centro recta CK perpendicularis ad contingentem GT, erit rectangulum PT in CK æquale quadrato ex CM (per 22. lib. 2.) & rectangulum CD in CK eſt æquale rectangulo MCB contento ſemiaxibus ut conſtat ex Prop. 1. lib. 4. ergo PT eſt ad CD ut quadratum ex CM ad rectangulum MCB, hoc eſt, ut CM ad CB. Erit ergo, per hanc Propoſitionem, CD ad QT (ſemidiametrum circuli contingentis Ellipſim aut oppoſitas Hyperbolas in duobus punctis & extra ipſas cadentis) in eadem ratione ſciz. ut CM ad CB.

Cor. II. Hinc patet quod diametri horum circulorum erunt inter ſe æquales, ſi contingant, ut in propoſitione, Hyperbolas æquilateras ſciz. quarum axes ſunt inter ſe æquales.

PROP.

PROP. XV.

Si a vertice axis tranſverſi Ellipſeos, aut Hyperbolæ, vel axis Parabolæ, ponatur in axe recta ipſius parametro æqualis; circulus circa hanc tanquam diametrum deſcriptus cadet totus intra ſectionem: ſi vero a vertice axis minoris Ellipſeos ponatur recta ipſius parametro æqualis, circulus hac diametro deſcriptus cadet totus extra ſectionem.

FIG. 23, 24, 25, 26. SIT AB axis tranſverſus Ellipſeos aut Hyperbolæ, vel axis Parabolæ, & ponatur in axe recta AC ipſius parametro æqualis; circulus circa diametrum AC deſcriptus cadet totus intra ſectionem; vel ſi AB fuerit axis minor Ellipſeos cadet circulus totus extra ſectionem.

Ducatur enim AD axi perpendicularis ipſique AC æqualis & jungatur CD, & in Ellipſi & Hyperbola jungatur *etiam BLD, in* Parabola vero ducatur DL axi parallela; & per quodvis in circulo punctum E ducatur EF ipſi AD parallela ſectioni occurrens in G, ipſis autem AB, CD, LD occurrens in punctis F, K, H. Quoniam igitur æquales ſunt AC, AD, æquales erunt FC, FK, & propter circulum eſt quadratum ex EF æquale rectangulo AFC, hoc eſt, ipſi AFK; propter ſectionem vero eſt quadratum ex GF æquale rectangulo AFH (ſciz. per Propp. 1. 4. 5. lib. 2.) eſt autem KF minor ipſâ FH, ſi AB non ſit axis minor Ellipſeos in quo caſu eſt KF major ipſâ FH, quare eſt rectangulum AFK minus ipſo AFH, in primo caſu, ideoque quadratum ex EF minus erit quadrato ex GF, & recta EF minor ipſâ GF & propterea eſt circulus totus intra ſectionem: et ſimiliter in altero caſu oſtendetur circulum eſſe totum extra eandem. *Q. E. D.*

COR.

Cor. I. Hinc, ſi a puncto A vertice axis, qui in Ellipſi & Hyperbola eſt tranſverſus, ponatur in axe & intra ſectionem recta AP, non major quam dimidium ipſius AC parametri ejuſdem axis, erit PA minima omnium rectarum, quæ ab eodem puncto P duci poſſunt ad ſectionem. Si vero a vertice axis minoris Ellipſeos ponatur recta AP, non minor quam dimidium parametri ejuſdem axis, erit PA maxima omnium rectarum, quæ ab eodem puncto P duci poſſunt ad ſectionem. Nam in priore caſu quoniam circulus radio PA deſcriptus non cadit extra circulum AEC, erit totus intra ſectionem; & quoniam hic circulus in poſteriore caſu non cadit intra circulum AEC erit totus extra ſectionem, unde in utroque caſu conſtat propoſitum.

Cor. II. Hinc, ſi in AB axe ſectionis conicæ (qui in Ellipſi aut Hyperbola eſt tranſverſus) detur punctum P cujus diſtantia a vertice propiore axis B eſt major dimidio ipſius parametri, patet methodus ducendi rectam a puncto P, quæ ſit minima omnium rectarum quæ ab eodem puncto duci poſſunt ad ſectionem ſciz. ad eandem partem axis. Fig. 21, 22.

Cum ſectio ſit Parabola ponatur in axe recta PO, verſus verticem axis B, æqualis dimidio parametri axis, & cum ſectio ſit Ellipſis aut Hyperbola ponatur in axe a centro C recta CO verſus verticem axis B ita ut CO ſit ad PO, ut axis AB ad ipſius parametrum, & in omni ſectioni ducatur per punctum O recta axi perpendicularis ſectioni occurrens in T, erit juncta PT recta ducenda. Nam per punctum T ducatur recta ſectionem contingens, erit recta PT huic contingenti perpendicularis, ut conſtat ex part. 1. Prop. 25. & Prop. 24. lib. 2. ergo recta PT eſt minima rectarum quæ a puncto P duci poſſunt ad ſectionem ſciz. ad eandem partem axis per Cor. 1. Prop. 13. hujus.

Et ſi in axe ſecundo Hyperbolæ detur punctum Q ad quamlibet diſtantiam a centro, eâdem prorſus methodo ducenda eſt recta QT

quæ ſit minima rectarum quæ ab eodem puncto duci poſſunt ad eandem ſectionem. Vel ſi in axe ſecundo Ellipſeos detur punctum Q cujus diſtantia a vertice remotiore axis M minor eſt dimidio ipſius parametri, eâdem prorſus methodo ducenda eſt recta QT quæ ſit maxima rectarum quæ ad eandem partem axis duci poſſunt a puncto Q ad ſectionem.

DEFINITIO IV.

SI circulus ſectionem conicam in quovis puncto ita contingat ut inter ipſum et ſectionem nullus alius circulus tranſire poteſt; hic circulus dicitur habere *eandem Curvaturam* cum ſectione in puncto contactus; vel dicitur ſectionem in iſto puncto *Oſculari.*

PROP. XVI.

Fig. 27, 28. A puncto C in ſectione conica ducatur ad axem ejus AH (qui in Ellipſi aut Hyperbola ſit tranſverſus) recta ipſi ordinatim applicata ſectioni rurſus occurrens in B, & a puncto B ducatur diameter BK, & a primo puncto C ducatur recta huic diametro ordinatim applicata ſectioni rurſus occurrens in R; ſi deſcribatur circulus CRP ſectionem contingens in C, & tranſiens per punctum R; hic circulus eandem habebit curvaturam cum ſectione in puncto contactus C.

DUCATUR per contactum C communis contingens, axi ſectionis occurrens in A, & per punctum B ducatur recta ſectionem contingens, hæc occurret alteri contingenti in A ad axem (Cor. 2. 26. lib. 1.) & erunt AC, AB æquales ut patet.

Dico

5
in
ex
to
j.)
j.)
tri
ſi
ta
;
a-
ſt
n
ıs
n
ſi
it
r
it
a

P FIG. 27.
a
e
it
ſi
a
a
S
;
ıt
ı
ı
[

Fig. 27, 28.

Dico imprimis circulum CRP ſectioni non occurrere niſi in punctis C & R, & eſſe ex una parte rectæ CR extra & ex altera parte intra ſectionem. Nam nequit ei occurrere in puncto B, quia tum in iſto puncto eam contingeret (per Cor. 2. 13. huj.) & proinde non occurreret ſectioni in tertio puncto R (per 12. huj.) & pari ratione nequit occurrere Ellipſi in altero vertice diametri BK, nam juncta CK eſt alteri axi ordinatim applicata. Sed ſi fieri poſſit, ſectioni occurrat in punctis C, R & O, ducatur recta per O parallela ipſi BA occurrens ſectioni in N, et ipſi AC in L; erit propter ſectionem (18. lib. 1.) rectangulum OLN ad quadratum ex LC, ut quadratum ex BA ad quadratum ex AC, hoc eſt in ratione æqualitatis, et igitur quoniam O eſt in circulo, quem LC contingit in C, erit etiam N in eodem circulo; et ergo circulus CRP occurrit ſectioni in tribus punctis R, O, N præter punctum contactus C, contra Prop. 11. hujus; ergo circulus CRP non niſi in punctis C, R ſectioni occurrit; et quoniam non contingit ſectionem in R (tum enim eſſet CR axi ordinatim applicata per partem primam Propoſitionis 13. hujus, contra hypotheſin) erit arcus iſtius circuli ex una parte rectæ CR totus extra, et ex altera totus intra ſectionem.

Si nunc deſcribatur quivis alius circulus, ut COS, ipſo CRP minor, contingens circulum CRP et ſectionem in C, cadet intra ſectionem ad utraſque partes puncti contactus C. Nam ſi iſte circulus tranſeat per B, ſectionem ibi continget, et proinde erit totus intra ſectionem (part. 2. Prop. 13. huj.) occurrat vero ipſi CB extra ſectionem in S; et quoniam circulus COS eſt totus intra circulum CRP, cadet neceſſario ex una parte contactus C intra ſectionem; ſit igitur arcus CM intra ſectionem, et cum punctum S eſt extra ſectionem arcus MS occurret ſectioni alicubi ut in O; ducatur per O recta, ipſi BA parallela, occurrens ſectioni in N, et ipſi AC in L; deinde oſtendetur ut prius, quod rectangulum OLN eſt æquale quadrato ex contingente LC, et proinde quod punctum FIG. 27.

N eſt in circulo COS; iſte vero circulus non continget ſectionem in N (12. huj.) quia eam contingit in C & ei occurrit in punctis N, O; cum igitur arcus SN ſit ad unam partem puncti N extra ſectionem erit arcus NC ad alteram partem puncti N, intra ſectionem; ideoque erit totus iſte arcus NC intra ſectionem: nam aliter circulus COS occurreret ſectioni in alio puncto præter puncta C, O, N contra Prop. 11. hujus: ergo circulus minor ipſo CRP cadit ad utraſque partes puncti contactus C intra ſectionem.

Fig. 28. Si nunc deſcribatur circulus CSOX major ipſo CRP, contingens circulum CRP & ſectionem in C, cadet ad utraſque partes puncti contactus C extra ſectionem. Nam quoniam eſt totus extra circulum CRP, erit neceſſario ad unam partem puncti C extra ſectionem; ſit igitur arcus ejus CXM extra ſectionem occurrens rectæ CR productæ in M, hic circulus CSOX, Parabolæ vel Hyperbolæ (quarum curvæ ſunt infinitæ) alicubi occurret inter M & C, puta in O; & in Ellipſi, quoniam CB eſt ordinata ad axem majorem, erit CK ordinata ad axem minorem: ſi igitur circulus CSOX non occurrat ipſi CK intra ſectionem, cadet totus extra Ellipſim (per part. 2. Prop. 13. huj.) occurrat igitur ipſi CK intra Ellipſim in S, & cum punctum M ſit extra Ellipſim, arcus MS Ellipſi occurret alicubi ut in O; ducatur igitur per punctum O in omni ſectione, recta parallela ipſi BA occurrens ſectioni in N & ipſi AC in L, deinde oſtendetur, ut prius, punctum N eſſe in circulo CSOX, ergo quoniam iſte circulus contingit ſectionem in C eam non iterum continget in puncto N vel O (per Prop. 12. huj.) quoniam igitur punctum M eſt extra ſectionem, erit arcus MO extra ſectionem, & proinde arcus OSN intra eandem, ideoque arcus NC ad alteram partem puncti N erit extra ſectionem & quoniam circulus CSOX non occurrit ſectioni niſi in punctis C, N, O (11. huj.) erit totus arcus NC extra ſectionem: ergo circulus CSOX cadit ad utraſque partes puncti C extra ſectionem.

Quoniam

Quoniam igitur circulus CRP contingens ſectionem in puncto C cadit ad unam partem iſtius puncti extra, & ad alteram partem intra ſectionem; & quivis alius circulus ſectionem in puncto P contingens cadit ad utraſque partes iſtius puncti vel intra vel extra ſectionem, patet nullum circulum tranſire poſſe inter ſectionem & circulum CRP; ergo circulus iſte eandem habet curvaturam cum ſectione in puncto C per Definitionem præcedentem.

LEMMA II.

CONTINGAT recta DS circulum in D & per punctum C intra circulum ducatur recta CX parallela contingenti DS; ſi a puncto D ducantur duæ rectæ circulo iterum occurrentes in M, K & rectæ CX in C, V, erunt rectangula MDC, KDV æqualia. FIG. 29.

Occurrat enim circulo recta CX in Y, et jungantur DY, MY, & in triangulis DYM, DCY erit angulus ad D communis, & angulus CYD æqualis eſt angulo alterno YDS, hoc eſt angulo DMY in ſegmento alterno (32. 3.) ideoque triangula DYM, DCY ſunt mutuo æquiangula; eſt ergo MD ad DY, ut DY ad DC (4. 6.) ideoque rectangulum MDC, æquale eſt quadrato ex DY: eodem modo oſtendetur (junctâ KY) rectangulum KDV eſſe æquale quadrato ex eadem DY; ergo conſtat propoſitum.

PROP.

PROP. XVII.

Si per quodvis punctum in ſectione conica ducatur recta ipſam contingens, & deſcribatur circulus hanc rectam in eodem puncto contingens, & abſcindens a diametro per hoc punctum ducta, ſegmentum ipſius parametro æquale; iſte circulus eandem habebit curvaturam, quam ſectio conica habet in puncto contactus.

FIG. 30. *Caſ.* 1. SIT AB axis ſectionis conicæ & per verticem ejus A ducatur contingens AD, erit angulus BAD rectus, ideoque ſi deſcribatur circulus ARC contingens rectam AD & ſectionem in A, centrum ejus erit in axe AB, & ſi iſte circulus abſcindat ſegmentum axis AC æquale ipſius parametro, erit totus intra ſectionem (vel extra eandem ſi AB ſit axis minor Ellipſeos) per Prop. 16. hujus; & igitur (cum AB non ſit axis minor Ellipſeos) circulus, contingens ſectionem in A & abſcindens ab axe ſegmentum ipſo AC minus, cadet totus intra ſectionem.

Si nunc circulus AHE abſcindat ab axe ſectionis conicæ ſegmentum AE ipſo AC majus; ſit centrum ejus P, & quoniam ſegmentum PA eſt majus dimidio parametri axis, duci poteſt a puncto P ad ſectionem recta PT vel P*t* ad utramque partem axis AB, quæ minor erit ipſâ PA (Cor. 2. Prop. 15. huj.) ergo circulus AHE circa diametrum AE deſcriptus occurret his rectis extra ſectionem productis, puta in punctis M, L, & quoniam idem circulus occurrit axi in E intra ſectionem, arcus ME neceſſario occurret ſectioni alicubi inter M & E, puta in H, & ſimiliter arcus LE ſectioni occurret in *b* inter L & E; & quoniam circulus iſte non occurrit ſectioni niſi in punctis A, H, *b* (11. huj.) arcus AMH, AL*b* erunt toti extra ſectionem, hoc eſt circulus

AMEL

AMEL, cadit ad utraſque partes puncti contactus C, extra ſectionem; quoniam igitur quivis circulus ſectionem in puncto A contingens cadit ad utraſque partes iſtius puncti vel intra circulum ARC vel extra ſectionem, patet nullum circulum tranſire poſſe inter ſectionem & circulum ARC; ergo circulus iſte, ſciz. qui ab axe AB abſcindit ſegmentum AC ipſius parametro æquale, eandem habet curvaturam cum ſectione in puncto A per definitionem præcedentem. Fig. 29.

Demonſtratio eſt prorſus eadem, cum punctum A eſt vertex axis minoris Ellipſeos; pro *Minor* legendo *Major*, & pro *intra extra*, et vice verſa.

Caſ. 2. Sit nunc Ellipſis aut Hyperbola, cujus axis tranſverſus eſt AB, & centrum C, & per punctum D non verticem axis ducatur recta DS ſectionem contingens & deſcribatur circulus DMK hanc rectam contingens in puncto D & abſcindens a diametro CD ſegmentum DM æquale ipſius parametro; habebit hic circulus eandem curvaturam cum ſectione in puncto D. Fig. 29.

Ducatur enim a puncto D ad axem tranſverſum ordinatim applicata DE, ſectioni iterum occurrens in F, per punctum F ducatur ſectionis diameter FCG, cui ordinatim applicata ſit DH, ſectioni rurſus occurrens in L & circulo in K. Ducatur diameter CQ ipſi DS parallela, occurrens ipſi DL in V, & ducatur ſemidiameter CR ipſi CF conjugata occurrens ipſi DS in S, & ei ordinatim applicata ſit TD: quoniam ſemidiametri CD, CF ſunt æquales, erunt ipſarum conjugatæ CQ, CR æquales; ſit PD dimidium ipſius MD parametri diametri DCM, et erit rectangulum PDC æquale quadrato ex ſemidiametro CQ ſive quadrato ex CR, hoc eſt rectangulo SCT per 48, & 49. lib. 1. ſive rectangulo VDH, (propter CS, VD & CH, TD parallelas) quoniam igitur rectangula PDC, VDH ſunt æqualia, ipſorum dupla ſciz. rectangula MDC, LDV erunt æqualia: ſed rectangulum KDV eſt quoque æquale rectangulo MDC (per Lemma præcedens) et proinde æquales ſunt LD, KD, ergo puncta L, K, coincidunt; ergo quoniam circulus DKM ſectionem

tionem contingens in D tranſit per L, alterum terminum rectæ a puncto D ordinatim applicatæ diametro FG, hic circulus eandem habebit curvaturam cum ſectione in D per Prop. præcedentem.

Fig. 31. Sit nunc ſectio Parabola cujus axis eſt AB, & per punctum D, non verticem axis, ducantur recta DS Parabolam contingens, & diameter DG; deſcribatur circulus DMK contingens rectam DS in D, & abſcindens a diametro DG ſegmentum DM ipſius parametro æquale; habebit iſte circulus eandem curvaturam cum Parabola in puncto D.

Ducatur enim a puncto D ad axem, ipſi ordinatim applicata, DE Parabolæ rurſus occurrens in F, & ducatur per F diameter FH, cui a puncto D ordinatim applicata ſit DH, Parabolæ rurſus occurrens in L, & circulo in K, a vertice diametri FH ducatur ad diametrum DG recta FG, ipſi ordinatim applicata, erit hæc parallela contingenti DS, & occurrat ipſi DH in C. Quoniam igitur parametri diametrorum DG, FH, ſunt æquales (Cor. 3. 25. lib. 2.) & abſciſſæ DG, FH ſunt æquales (2. lib. 3.) erunt etiam ordinatæ DH, FG æquales, propter vero triangula DCG, FCH ſimilia & ipſorum latera DG, FH æqualia, erit DC æqualis ipſi CH & proinde erit DC quarta pars totius DL; erit igitur rectangulum LDC æquale (quadrato ex DH, ſive ex FG, hoc eſt propter Parabolam) rectangulo MDG; eſt etiam (per Lemma præcedens) rectangulum KDC æquale rectangulo MDG, ideoque ut prius, circulus DMK tranſibit per L, & proinde eandem habebit curvaturam cum Parabola in puncto D. *Q. E. D.*

Cor. Hinc, ſi circulus DBF contingat Parabolam in duobus punctis D, F, & per contactum D deſcribatur circulus DMO, eandem curvaturam habens cum Parabola in puncto D; parameter axis Parabolæ, diameter circuli DBF, parameter diametri DG, & diameter circuli curvaturæ, erunt continue proportionales. Erit juncta DF axi ordinatim applicata (13. huj.) cui occurrat in E, per

D

D ducatur recta Parabolam contingens axi occurrens in S, hæc quoque utroſque circulos continget; erigatur igitur a puncto D perpendicularis ipſi DS, axi occurrens in X, erit XD radius circuli contingentis Parabolam in D & F, & ſegmentum DM diametri DG a circulo curvaturæ abſciſſum, æquale erit parametro iſtius diametri; ſi igitur a centro hujuſce circuli dimittatur perpendicularis NP ad ipſam DM, erit PD dimidium ipſius DM et proinde æqualis ipſi SX & erit EX dimidium parametri axis (Prop. 25. lib. 2.) ſed EX eſt ad XD, ut XD ad XS, & ut XD ad XS, ita (ob ſimilia triangula DXS, PDN) eſt PD ſive XS ad ND, igitur totæ rectæ ſciz. parameter axis Parabolæ, diameter circuli DBF, parameter diametri DG, & DO diameter circuli curvaturæ erunt continue proportionales.

PROP. XVIII.

Si circulus DMO contingens Ellipſim aut Hyperbolam in puncto D, eandem habeat curvaturam cum ſectione in iſto puncto; erit ſemidiameter ejus ND, ad ſectionis ſemidiametrum CQ conjugatam ei quæ per punctum D tranſit, ut quadratum ex eadem CQ ad rectangulum ACZ contentum ſemiaxibus. Fig. 29.

SI circulus ſectionem in vertice axis contingat, ejus diameter erit ejuſdem axis parameter per Prop. 16. hujus, ergo in hoc caſu manifeſto conſtat propoſitum.

Si vero circulus DMO ſectionem contingat in puncto D non vertice axis; per punctum D ducatur communis contingens DS, in hanc a centro ſectionis dimittatur perpendicularis *Ca*; ſit DM ſegmentum diametri CD a circulo DMO abſciſſum, & in ipſam a centro iſtius circuli dimittatur perpendicularis NP, erit PD dimidium parametri diametri CD; eſt igitur rectangulum PDC æquale quadrato ex ſemidiametro CQ ipſi CD conjugata, propter vero

 triangula

triangula NDP, DC*a* ſimilia, erit ND ad CD, ut PD ad C*a*, eſt igitur rectangulum ND in C*a* æquale (rectangulo PDC hoc eſt) quadrato ex CQ; eſt autem ND ad CQ ut (rectangulum ND in C*a* hoc eſt) quadratum ex CQ ad rectangulum CQ in C*a*, ſed rectangulum CQ in C*a* eſt æquale rectangulo ACZ contento ſemiaxibus (1. lib. 4.) ideoque ND ſemidiameter circuli DMO eſt ad ſemidiametrum CQ ut quadratum ex ipſa CQ ad rectangulum ACZ contentum ſemiaxibus. *Q. E. D.*

Cor. Quoniam in demonſtratione hujus Prop. oſtenditur rectangulum ND in C*a* æquale eſſe quadrato ex CQ conſtat quod ND radius circuli curvaturæ, CQ ſemidiameter ſectionis communi contingenti DS parallela, & C*a* perpendicularis a centro ſectionis in hanc contingentem dimiſſa, ſunt continue proportionales.

PROP. XIX.

Fig. 32. Si recta ſecans ſectionem conicam in duobus punctis D, F; occurrat duabus contingentibus AB, AC in punctis E, G & jungenti contactus BC in H; erit rectangulum DEF ad rectangulum FGD, ut quadratum ex EH ad quadratum ex GH.

PER punctum E, in quo ſecans uni contingentium AB occurrit, ducatur recta alteri contingenti AC parallela, occurrens rectæ jungenti contactus in M, & ducatur recta ipſi DF parallela contingens ſectionem in L & occurrens contingenti AC in K; per Cor. Prop. 53. lib. 1. eſt rectangulum DEF ad quadratum ex EM, ut quadratum ex KL ad quadratum ex KC, hoc eſt, ut rectangulum FGD ad quadratum ex GC per Prop. 18. lib. 1. ergo, alternando, erit rectangulum DEF ad rectangulum FGD, ut quadratum ex

EM

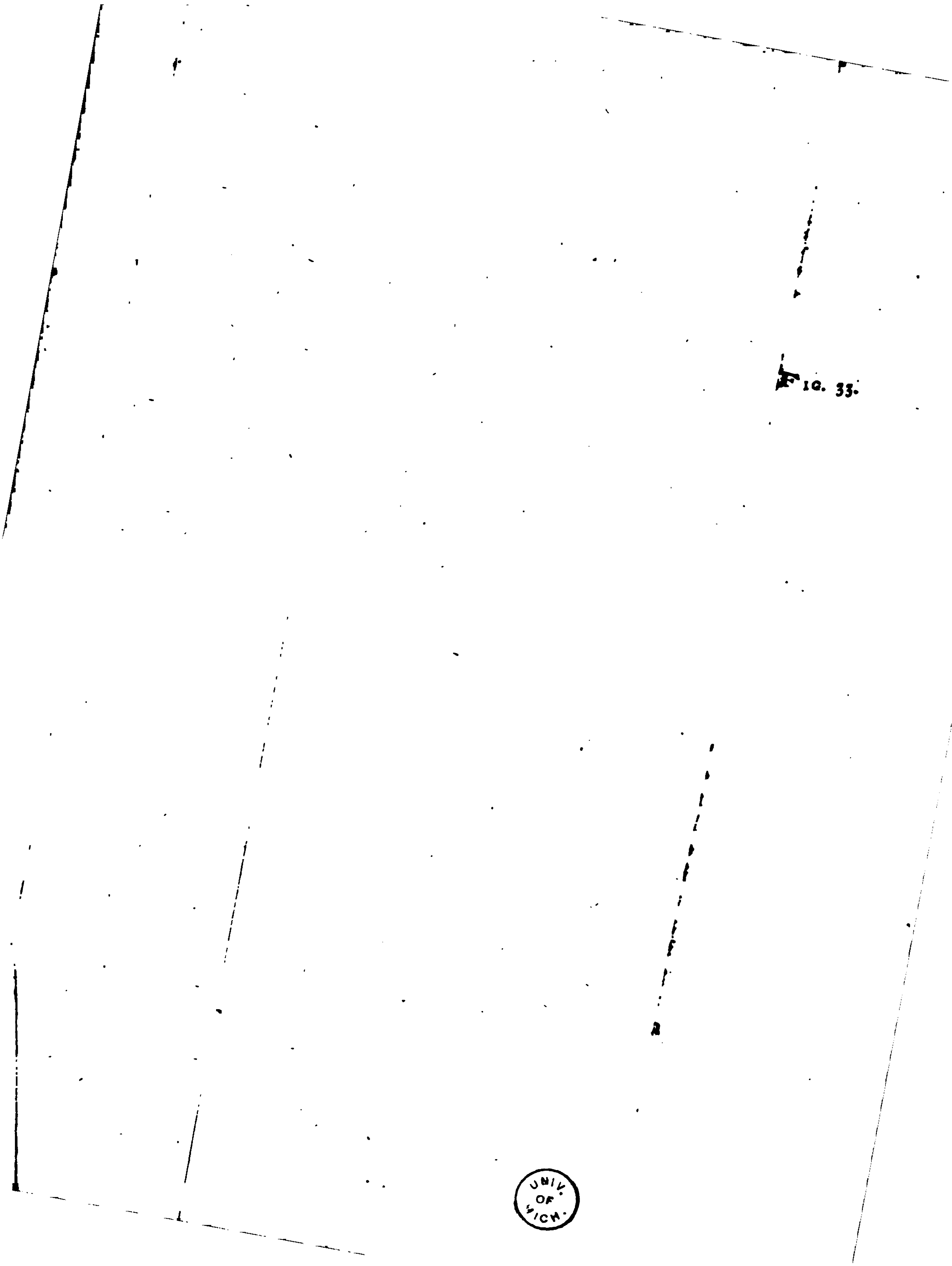


Fig. 33.

UNIV. OF MICH.

Fig. 32.

EM ad quadratum GC hoc eſt (ob ſimilia triangula HEM, HGC) ut quadratum ex EH ad quadratum ex GH. *Q. E. D.*

Si contingentes quibus ſecans occurrit ſint inter ſe parallelæ propoſitio manifeſta eſt ex Cor. 2. 18. lib. 1.

PROP. XX.

Si duæ rectæ DF, CA ſecantes ſectionem conicam in punctis D, F & C, A ſibi invicem occurrant in G, & etiam occurrant in punctis E, H rectæ ſectionem contingenti in B, erit quadratum ex EB ad quadratum ex BH, in ratione compoſita ex ratione rectanguli DEF ad rectangulum CHA, & ratione rectanguli AGC ad rectangulum FGD. Fig. 33.

Caſ. 1. PER punctum E, in quo una ſecantium DF contingenti occurrit, ducatur recta alteri ſecanti AC parallela quæ primo occurrat ſectioni in punctis K, L, propter haſce parallelas ſecantes, erit quadratum ex EB ad quadratum ex BH, ut rectangulum KEL ad rectangulum CHA; ſed ratio rectanguli KEL ad rectangulum CHA componitur, ex ratione rectanguli KEL ad rectangulum AGC hoc eſt, ex ratione rectanguli DEF ad FGD, & ex ratione ejuſdem AGC ad CHA; ergo ratio quadrati ex EB ad quadratum ex BH compoſita eſt ex ratione rectanguli DEF ad FGD & ex ratione rectanguli AGC ad CHA, hoc eſt ex ratione DEF ad CHA & ex ratione AGC ad FGD.

Caſ. 2. Si nunc ducatur quævis recta ipſi DF parallela occurrens ſectioni in punctis *d*, *f*, rectæ AC in *g* & contingenti in puncto *e* per quod recta ducta ipſi AC parallela ſectioni non occurit; tum poſitis jam demonſtratis, ratio quadrati ex *e*B ad quadratum ex BH; componitur ex ratione quadrati ex *e*B ad quadratum ex EB & ratione quadrati ex EB ad quadratum ex BH; componitur ergo, ex ratione rectanguli *def* ad DEF (Cor. 4. 18. lib. 1.) &

ejuſdem DEF ad CHA, & AGC ad FGD, per caſum præcedentem, hoc eſt, ex ratione rectanguli *def* ad CHA & AgC ad *fgd*, (quia ſciz. omitti poteſt rectangulum DEF quod eſt tam inter antecedentes quam inter conſequentes quæ rationem componunt & pro AGC, FGD, ſubſtituti poſſunt AgC, *fgd* quæ ſunt inter ſe ut ipſa AGC, FGD, per Prop. 18. lib. 1.) ergo in hoc caſu etiam conſtat propoſitum.

Duæ præcedentes propoſitiones a *Newtono* partim demonſtrantur in Prop. 23 & 24. lib. 1. Prin. Math.

PROP. XXI. PROBL. I.

Datis in ſectione conica quinque punctis ipſam deſcribere.

FIG. 34. SINT F, G, K, M, N quinque puncta data in ſectione conica, jungantur quatuor ex iis, duabus rectis FG, MN ſibi invicem occurrentibus in puncto R, & per punctum quintum K, ducantur duæ rectæ KD, KH parallelæ rectis FG, MN, & occurrentes ipſis MN, FG in punctis E & Q; in iſtis rectis KD, KH, (ſi opus productis) ſumantur puncta D, H, ita ut rectangulum KED ſit ad MEN, ut GRF ad MRN, & ut KQH ſit ad GQF, ut MRN, ad GRF; (oportet autem puncta K, D, vel K, H eſſe ad eaſdem aut diverſas partes punctorum E, vel Q prout puncta M, N, vel G, F, ſunt ad eaſdem vel diverſas partes eorundem punctorum E, vel Q.) Patet per Prop. 18. lib. 1. quod puncta D, & H, ſunt in ſectione conica per quinque puncta F, G, K, M, N tranſeunte; ducatur igitur recta IL biſariam ſecans parallelas KD, GF ſectione terminatas, erit hæc diameter ſectionis, & ducatur altera diameter AB, biſariam ſecans parallelas KH, MN in O, P; ſi hæ diametri ſint inter ſe parallelæ, ſectio erit Parabola & cum in ea dantur quatuor puncta K, M, N, G ipſa deſcribi poteſt per caſum ſecundum Prop. 9.

9. lib. 3. Si vero diametri ſibi invicem occurrant ut in puncto C, erit ſectio Ellipſis aut Hyperbola quæ deſcribi poteſt per Cor. 3. Prop. 10. lib. 4. nam datur centrum ejus C, & poſitione datur diameter AB cui ordinatim applicantur parallelæ KH, MN.

In hoc problemate & ſequentibus cum ſectio deſcribenda dicitur Ellipſis, inter Ellipſes numeratur circulus.

PROP. XXII. PROBL. II.

Sectionem conicam deſcribere quæ per tria puncta data tranſeat, & duas rectas poſitione datas contingat.

SINT rectæ AV, AB poſitione datæ; & primo deſcribenda ſit ſectio quæ has rectas contingat in datis punctis B, V, & tranſeat per tertium punctum datum intra angulum BAV. Fig. 35.

Si rectæ AB, AV, ſint parallelæ ſectio deſcribenda erit Ellipſis ejuſque diameter erit juncta BV, cui ordinatim applicata erit recta ducta per tertium punctum datum & ipſis AB, AV parallela, & proinde ſectio in hoc caſu facile deſcribitur, per Cor. Prop. 35. lib. 2.

Caſ. 1. Occurrant vero rectæ AB, AV in A, biſariam ſecetur juncta BV in P, & ducatur PA, erit hæc diameter ſectionis deſcribendæ (26. lib. 1.) ſit nunc tertium punctum datum O in recta PA; ſi PO, OA ſint æquales, deſcribatur Parabola (per 33. lib. 2.) cujus diameter eſt recta PA, verticem habens O, & cui ipſa BV ſit ordinatim applicata, rectæ AB, AV hanc Parabolam contingent in B & V ut conſtat ex Prop. 47. lib. 1. Si vero punctum O ſit inter P & A, et rectæ PO, OA ſint inæquales, producatur ipſarum minor ad C, ita ut CP, CO, CA ſint proportionales et ſumatur CQ æqualis ipſi CO, tum (per Cor. 35. lib. 2.) deſcribatur Ellipſis aut Hyperbola cujus diameter ſit OQ, cui recta VB ſit ordinatim applicata, ſectio rectas AB, AV continget in punctis B, & V (ut conſtat ex Prop.

48,

48, 49. lib. 1.) ſi PO minor ſit ipſâ OA ſectio erit Ellipſis aliter Hyperbola. Si punctum in recta PA datum ſit Q non inter P & A; ſumatur punctum C inter P & Q ita ut CP, CQ, CA ſint proportionales, & ſit CO æqualis ipſi CQ, tum diametro OQ deſcribatur Ellipſis ut prius, continget rectas AB, AV in B, & V, ut patet.

Si manentibus punctis B & V, datum ſit tertium punctum K non in AP diametro ſectionis; ducatur KE ipſi BV parallela occurrens contingenti AB in L & ipſi AP in F & ſit FE æqualis ipſi KF, & a puncto L ſumatur verſus K, recta LG cujus quadratum ſit æquale rectangulo KLE, jungatur BG occurrens ipſi AP in O; tum ut prius deſcribatur ſectio contingens rectas AB, AV in B & V, & tranſiens per punctum O, tranſibit hæc per punctum datum K; nam ſi non, occurrat ſectio rectæ KE in R & ſit FT æqualis ipſi RF, quoniam RE eſt parallela rectæ BV erit ordinatim applicata diametro AP & ergo erit punctum T in ſectione, & erunt KR, TE æquales, ducatur per O recta ſectionem contingens, occurrens contingenti AB in N, erit hæc parallela ipſi LRT, ergo rectangulum RLT eſt æquale quadrato ex LG (per Prop. 53. lib. 1.) hoc eſt rectangulo KLE, quod eſt abſurdum; ergo ſectio tranſit per punctum datum K.

Fig. 36. *Caſ.* 2. Sint nunc AB, AV rectæ poſitione datæ, & K, E, F tria puncta inter has rectas; oportet ſectionem contingere has rectas & per hæc puncta tranſire.

Jungantur puncta K, F, & K, E rectis quæ ocurrant rectis AB, AV, in punctis D, G & L, N, in recta KF ſumatur punctum H ita ut quadratum ex HD ſit ad quadratum ex HG, ut rectangulum KDF ad rectangulum FGK, & in recta KE ſumatur punctum P, ita ut quadratum ex PL ſit ad quadratum ex PN, ut rectangulum KLE ad rectangulum ENK, ducatur recta jungens puncta H, P; ſi hæc occurrat in punctis B, & V lateribus anguli BAV, intra quem ſunt puncta tria data, per caſum præcedentem, deſcribatur ſectio

ſectio contingens rectas AB, AV in B & V, & tranſiens per K, tranſibit hæc quoque per F & E; nam ſi hæc ſectio non tranſeat per F occurrat rectæ KF in X; tum per Prop. 19. hujus, rectangulum KDX erit ad rectangulum XGK ut quadratum ex HD ad quadratum ex HG hoc eſt (per conſtructionem) ut rectangulum KDF ad rectangulum FGK, quod eſt abſurdum; ergo ſectio tranſit per punctum F, & ſimiliter oſtendetur eam tranſire per punctum E.

Si recta KF jungens duo e tribus punctis datis ſit parallela ipſi AV uni e rectis poſitione datis; tum punctum in ea H ad alterutram partem puncti D ſumendum eſt, ita ut quadratum ex DH ſit æquale rectangulo KDF, ut patet ex Prop. 53. lib. 1.

Cum ſegmenta DK, FG, & proinde rectangula KDF, FGK, ſint inæqualia, patet punctum H ſumi poſſe vel inter K & F vel ad alteras partes ſegmenti minoris DK, & pari ratione punctum P ſumi poteſt ad alterutras partes ſegmenti LK; & ſimiliter ductâ rectâ per E, F, ſi hæc occurrat rectis AB, AV, in ea inveniri poſſunt duo puncta eodem modo quo inventæ fuerunt puncta H, P, & proinde aliquando duci poſſunt duodecim rectæ ſicut recta HP ducta fuit, et quot ex his rectis occurrunt lateribus anguli BAV tot deſcribi poſſunt ſectiones quæ problemati in hoc caſu ſatisfacient.

Caſ. 3. Si poſitione dentur duæ rectæ AB, AV & oporteat ſectionem deſcribere quæ contingat rectam AV in puncto dato V & rectam AB in alio puncto & tranſeat per puncta data K, F; jungatur KF & in ea ſumatur punctum H ut in caſu præcedente, ducatur VH occurrens ipſi AB in B, tum ut prius deſcribatur ſectio contingens rectas AB, AV in B & V & tranſiens per K, tranſibit hæc per punctum F, ut in caſu præcedente. Si punctum H in hoc caſu ſumi poteſt vel inter puncta K, F vel non, deſcribi poſſunt duæ ſectiones quæ in hoc caſu problemati ſatisfacient.

In hac propoſitione ſolvuntur omnes caſus Prop. 23. lib. 1. Prin. Math.

PROP.

PROP. XXIII. PROBL. III.

Datis in ſectione conica quatuor punctis & rectâ eam contingente poſitione datâ; ſectionem deſcribere.

FIG. 33. *Caſ.* 1. SINT A, F, D, C, quatuor data puncta in ſectione, & ſit EH recta eam contingens; ducantur rectæ AC, FD, occurrentes contingenti in punctis E & H; ſi hæ rectæ ſint parallelæ ſibi invicem, ſumatur in contingente punctum B, inter E et H ita ut quadratum ex EB, ſit ad quadratum ex BH, ut rectangulum DEF ad rectangulum CHA, erit B punctum contactus per Cor. 4. 18. lib. 1. et ſi ſegmentum EB majus ſit ſegmento BH, punctum B ſumi poteſt ad alteras partes puncti H; ſi vero rectæ AC, FD ſibi invicem occurrant ut in G, tum per Prop. 20. inveniri poteſt punctum contactus B, quod ut prius ſumi poteſt vel inter E et H vel non. Cum igitur quinque puncta A, F, D, B, C, in ſectione dantur, ſectio deſcribi poteſt per Prop. 21. hujus.

FIG. 37. *Caſ.* 2. Sint A, B, C, D puncta data in ſectione, et eam contingat recta GB in B; jungantur puncta data quatuor rectis conficientibus trapezium cujus nulla latera ſint parallela, occurrant ejus diagonales in E, et producantur latera ejus AD, BC, quæ ſibi invicem occurrant in F, ita ut juncta EF occurrat ipſi GB in G, (quod ſemper fieri licet) quoniam igitur in ſectione conica inſcribantur duæ rectæ AB, DC non inter ſe parallelæ, et ipſarum termini jungantur quatuor rectis ſibi invicem occurrentibus in punctis E et F, et contingens per B ducta occurrit junctæ EF in G, contingens per A ducta occurret ipſi EF in eodem puncto G, per Prop. 8. hujus, ergo juncta AG ſectionem deſcribendam continget. Deſcribatur igitur, per caſum primum præcedentis, ſectio quæ contingat rectas GA, GB, in punctis A, B, et tranſeat per punctum

C,

C, tranſibit etiam per D; nam ſi non, occurrat rectæ BD in X, tum juncta AX occurreret ipſi BC in E, per 8. hujus, quod eſt abſurdum; ergo ſectio tranſibit per D.

Si nunc AB, DC, duo latera trapezii ſint parallela, recta EF ea biſecans erit diameter, et ſi contingens GB occurrat ipſi EF ut in G, tum contingens per A ducta occurret ipſi EF in eodem puncto G, in quo caſu ſectio deſcribenda eſt ut prius; ſi vero contingens GB ſit diametro EF parallela, contingens per A ducta erit eidem EF parallela, & ſectio deſcribenda erit Ellipſis, in qua recta AB erit diameter ipſi EF conjugata, & ergo ſi a puncto D vel C ducatur ad AB recta, ipſi EF parallela, erit hæc ordinatim applicata diametro AB, & exinde (per Cor. 1. 31. lib. 1.) inveniri poſſunt vertices diametri EF, et deſcribi poterit Ellipſis per Prop. 35. lib. 2.

Si denique rectæ quatuor puncta data jungentes conficiant parallelogrammum, ſectio erit Ellipſis cujus diametri conjugatæ ſunt rectæ bifariam ſecantes latera oppoſita parallelogrammi, et earum magnitudines inveniuntur per Prop. 48. lib. 1. *Q. E. F.*

PROP. XXIV. PROBL. IV.

Datis poſitione quinque rectis, ſectionem conicam contingentibus; invenire puncta contactus in ipſis, ſciz. ſectione poſitione non datâ.

CONTINGANT ſectionem conicam rectæ AB, BC, CD, DE, EA, & invenienda ſunt puncta contactus in ipſis. Fig. 38.

Sit ABCDE quinquelaterum contingentibus comprehenſum, & appelletur AB *latus primum*, BC *latus ſecundum*, & ita deinceps; ſitque FBCD quadrilaterum contentum primis quatuor lateribus, & ducantur rectæ diagonales BD, FC, ſibi mutuo occurrentes in M: omiſſo jam quinquelateri primo latere AB, ſit ICDE quadrilaterum reliquis contentum, & ducantur diagonales ipſius ID, CE ſibi mu-

tuo occurrentes in N; & MN jungatur: tranſibit hæc per puncta in quibus latus ſecundum BC, & quartum DE, ſectionem contingunt.

Sint enim G, H, K, L, O puncta contactus in ipſis AB, BC, CD, DE, EA, & jungantur GH, LK & GL, HK: quoniam igitur in ſectione inſcriptæ ſunt GH, LK, eſtque B punctum concurſus rectarum quæ ſectionem in terminis ipſius GH contingunt, D vero concurſus earum quæ eandem in terminis ipſius LK contingunt, erunt puncta B, D & interſectio junctarum GK, LH in recta linea, per Propoſitionem 8. hujus. Rurſus, quoniam in ſectione inſcriptæ ſunt GL, HK, rectæ vero quæ ſectionem contingunt in G, L conveniunt inter ſe in F, quæ vero ipſam in H, K contingunt conveniunt in C; erunt puncta F, C & interſectio ipſarum GK, LH in recta linea: eadem autem interſectio oſtenſa fuit eſſe in recta BD; ergo ipſa erit in rectarum BD, FC occurſu, hoc eſt, in puncto M; quod propterea erit in recta LH. Jungatur jam LO; &, quoniam in ſectione inſcriptæ ſunt rectæ OH, LK, rectæ vero quæ ſectionem in O, H contingunt conveniunt in I, & quæ ipſam in L, K contingunt conveniunt in D, erunt puncta I, D, & junctarum OK, LH interſectio, in recta linea; & quoniam OL, HK inſcriptæ ſunt in ſectione, eadem ratione oſtendentur puncta E, C; & earundem OK, LH interſectio, in recta linea exiſtere; quare erit ipſa in rectarum ID, EC occurſu, hoc eſt, in puncto N; eſt igitur N in recta LH, & oſtenſum fuit eſſe M in eadem; quare recta MN tranſit per L, H, puncta ſciz. contactus in ipſis BC, DE. Et eadem prorſus ratione invenientur puncta contactus in reliquis rectis.

Fig. 39. Cor. Et ſimiliter, ſi in ſectione conica data ſint quinque puncta A, B, C, D, E, facillime invenientur rectæ quæ ſectionem in punctis iſtis contingunt, ſectione ſciz. poſitione non datâ.

Vocetur A *primum punctum*, B *ſecundum*, & ita deinceps; & jungantur quatuor prima puncta A, B, C, D, rectis AB, BC, CD, DA

DA ſibi mutuo occurrentibus in punctis F, G; jungantur etiam AC, BD: & quoniam in ſectione inſcriptæ ſunt rectæ AC, BD, erunt (per Prop. 8. huj.) puncta F, G, & occurſus rectarum quæ ſectionem in punctis B, D contingunt, in recta linea, hoc eſt, juncta FG per occurſum hunc tranſibit. Omiſſo jam puncto A, ſit BCDE quadrilaterum reliquis quatuor contentum, ſintque puncta H, K interſectiones laterum ipſius, & EC jungatur: quoniam igitur in ſectione inſcriptæ ſunt EC, BD rectæ, erunt interſectiones H, K, & occurſus rectarum quæ ſectionem in B, D contingunt, in recta linea, hoc eſt, juncta HK per occurſum hunc tranſibit: idem vero occurſus oſtenſus fuit eſſe in recta FG, ergo ipſe in rectarum FG, HK interſectione L invenietur; et propterea junctæ LB, LD ſectionem in B, D punctis contingent. Et eadem prorſus ratione invenientur contingentes ſectionem in reliquis punctis.

Hæc Propoſitio ejus Corollarium ex Conicis Dom. *Roberti Simſon*, deſumuntur. vid. Cor. 2. & 3. Prop. 47. lib. 5. Edit. 1.

F I N I S.

Errata ſic Corrige.

Pag. 2. *lin.* 26. *pro* ductæ. *lege* ducti *p.* 38. *l.* 23. *pro* obſciſſis *lege* abſciſſis. *p.* 57. *l.* 19. *pro* quas *lege* quibus. *p.* 60. *l.* 5. *pro* poſitæ *lege* poſita. *p.* 62. *l.* 28. *pro* aſymptoton *lege* aſymptotos. *p.* 63. *l.* 4. *pro* proprius *lege* propius. *p.* 132. *l.* 10. *pro* ſumaretur *lege* ſumeretur. *p.* 116. *l.* 18. & *p.* 118. *l.* 24. *pro* paxillum *lege* paxillus. *p.* 158. *l.* 17. *pro* quavis *lege* quaſvis. *p.* 163. *l.* 7. *pro* curvituram *lege* curvaturam. *p.* 174. *l. ult. pro* a & *lege* & a. *p.* 206. *l.* 25. *pro* ocurrant *lege* occurrant. *p.* 207. *l.* 18. *pro* inventæ *lege* inventa.

UNIVERSITY OF MICHIGAN
3 9015 06725 2208

1817
ARTES VERITAS SCIENTIA
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
TUEBOR
SI QUAERIS PENINSULAM AMOENAM
CIRCUMSPICE

B 449684